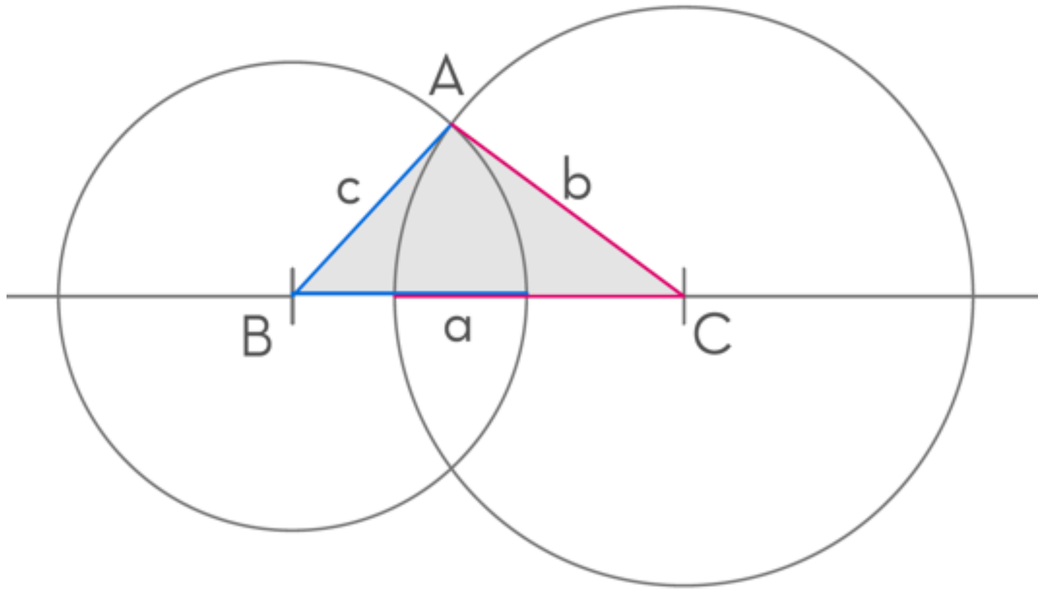
TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster Universitario en Profesorado en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Especialidad de Matemáticas

SIGNIFICADOS Y RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULOS CON ESTUDIANTES DE E.S.O.



Curso 2015/2016

Autora: Sofía Zafra Jiménez

Tutor: Luís Rico Romero

Universidad de Granada

Memoria de Trabajo Fin de Máster realizada bajo la tutela del Doctor D. Luís Rico Romero, del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, presentada por Dª. Sofía Zafra Jiménez para la obtención del Máster Universitario en Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Fdo.: Sofía Zafra Jiménez

Vº Bº del tutor

Fdo.: Luis Rico Romero

1. INTRODUCCIÓN

El presente documento es un Trabajo Fin de Máster desarrollado durante el curso académico 2015/2016 para la obtención del título de Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de Matemáticas, por la alumna Dª. Sofía Zafra Jiménez, bajo la supervisión del doctor D. Luís Rico Romero. El trabajo que aquí se presenta consta de dos partes. Por un lado, un análisis de contenido. Por otro, el diseño y realización de una investigación educativa exploratoria y descriptiva. Ambas partes del trabajo, la implementación del contenido analizado y su estudio empírico mediante investigación se realizan en un Instituto de Educación Secundaria público ubicado en la ciudad de Granada, con grupo de alumnos de 3º E.S.O. Las dos partes del trabajo no son independientes. El análisis de contenido realizado sirve de organizador a la hora de analizar las respuestas de los escolares en el estudio empírico, en el que se promueve la reflexión de estos a través de una serie de actividades escritas. El contenido escogido forma parte del currículo en el bloque de Geometría, en sus apartados correspondientes a la métrica del triángulo. En definitiva, lo que se pretende es observar, analizar, interpretar y describir los argumentos que nuestros alumnos expresan y formulan sobre conceptos y relaciones métricas en el triángulo.

Para el desarrollo del trabajo, en primer lugar se consideran las competencias profesionales cuya adquisición por parte de la autora se muestra mediante la realización del presente trabajo, así como los detalles e interés de la elección de esta modalidad, de análisis de contenido y posterior estudio empírico. Se hará hincapié en el interés que tiene esta rama de la matemática en tanto que contenido curricular de Educación Secundaria.

El segundo apartado corresponde a la justificación del presente trabajo, y está constituido por su motivación y el marco curricular en que se ubica. El proceso de enseñanza–aprendizaje de la métrica del triángulo muestra una amplia diversidad de significados que sustentan los conceptos básicos de su estructura. La Geometría, como rama matemática que engloba estos contenidos, se hace imprescindible, ya que además proporciona procedimientos y conceptos, en definitiva herramientas, que servirán al alumno para desarrollar competencias clave. Los contenidos matemáticos que se abordan se encuentran recogidos en el RD 1105/2014. De este modo el epígrafe constituye una justificación del contenido seleccionado para desarrollar la Unidad Didáctica en la que se inserta nuestro trabajo.

A continuación, en el tercer epígrafe se detalla el objetivo general del estudio, en el que se enuncia la finalidad del análisis conceptual y el contexto en que se lleva a cabo la investigación educativa, así como los objetivos específicos de cada actuación.

Acto seguido se concreta el marco teórico de la investigación. Primero se describe una breve selección de antecedentes, es decir estudios previos relacionados con los aspectos que se están desarrollando, y que sirven de apoyo para la elaboración del trabajo. Después se lleva a cabo el análisis del contenido que nos interesa, que forma parte del análisis didáctico. Este análisis nos proporcionará las categorías en las que nos apoyamos para realizar el análisis de las respuestas de los estudiantes a las tareas de la fase de estudio empírico, así como del resto de tareas que se implementarán en el aula.

El siguiente epígrafe trata sobre el diseño y método de la investigación educativa realizada. Este estudio proporciona una oportunidad para mostrar cómo se aborda el estudio de uno o varios conceptos matemáticos escolares mediante el triángulo semántico (cuyas componentes son los signos, sentidos y referencia), que en términos escolares serían sus estructuras formales, sus sistemas de representación y sus sentidos o modos de uso (Rico, 2012). En el diseño, se muestra el material didáctico elaborado sobre el que se apoya el trabajo de estudio empírico, los contenidos teóricos que deben haber adquirido los alumnos antes de la tarea, el contexto y los elementos que conforman la investigación, y por último, los instrumentos de recogida de información y el proceso de implementación de la actividad en el aula.

Después, se describe la metodología empleada para analizar la producción de los alumnos. En este apartado figura el análisis de los datos y resultados obtenidos. Por último, figuran las conclusiones de la totalidad del trabajo, que parten de los objetivos planteados al inicio, y que nos servirán para comprobar si los resultados han sido satisfactorios y para emitir una valoración acerca de la utilidad del estudio empírico.

1.1. COMPETENCIAS A ADQUIRIR CON EL PRESENTE TFM

Según **la ORDEN ECI/3858/2007, de 27 de diciembre**, y la Orden EDU/3498/2011, de 16 de diciembre, por la que se modifica la anteriormente citada, las competencias que deben adquirirse en el Módulo Práctico (que incluye el Trabajo Fin de Máster) serán:

- Adquirir experiencia en la planificación, la docencia y la evaluación de las materias correspondientes a la especialización.
- Acreditar un buen dominio de la expresión oral y escrita en la práctica docente.
- Dominar las destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar un clima que facilite el aprendizaje y la convivencia.
- Participar en las propuestas de mejora en los distintos ámbitos de actuación a partir de la reflexión basada en la práctica.
- Para la formación profesional, conocer la tipología empresarial correspondiente a los sectores productivos y comprender los sistemas organizativos más comunes en las empresas.
- Respecto a la orientación, ejercitarse en la evaluación psicopedagógica, el asesoramiento a otros profesionales de la educación, a los estudiantes y a las familias.
- Estas competencias, junto con las propias del resto de materias, quedarán reflejadas en el Trabajo Fin de Máster que compendia la formación adquirida a lo largo de todas las enseñanzas descritas.

La última competencia hace referencia a que el presente TFM debe mostrar no sólo la formación adquirida durante el módulo práctico, sino que además debe ser reflejo de lo aprendido en todas las demás materias teóricas.

Por tanto, la intencionalidad de este estudio es mostrar un buen dominio de las distintas materias cursadas, incluyendo su puesta en práctica durante el ejercicio docente. Para ello, las actuaciones que se han llevado a cabo han sido:

- Un breve estudio sobre la Geometría en la Educación Secundaria Obligatoria, su utilidad y puesta en práctica a través de tareas, y más concretamente sobre el contenido relacionado con triángulos y figuras planas, cálculo de perímetros, y áreas de polígonos regulares.
- La elaboración de una Unidad Didáctica centrada en el bloque de Geometría de 3º de E.S.O., titulada Lugares geométricos y área de figuras planas y su posterior implementación durante el periodo de prácticas en un Instituto de Educación Secundaria de la ciudad de Granada.
- Un trabajo práctico de investigación llevado a cabo con los alumnos del curso en el que he impartido la Unidad Didáctica sobre argumentos y razonamientos lógico-deductivos acerca de determinadas relaciones métricas en triángulos.

1.2. MODALIDAD ELEGIDA

El estudio consta de un análisis conceptual sobre las relaciones métricas en un triángulo, y posteriormente una breve investigación educativa. El análisis de contenido previo sirve como organizador para analizar las respuestas de los escolares a las tareas de investigación propuestas. Esta segunda parte del trabajo es un estudio empírico, actividad que sirve para adquirir nuevos conocimientos y que sustenta la innovación, pero que no siempre concluye en ella. Sólo las actividades que persigan la innovación educativa de forma sistemática e intencional podrán considerarse como investigación educativa, y es este reto el que ha motivado mi elección de esta modalidad de Trabajo Fin de Master. Para transformar el Sistema Educativo, la investigación es una vía natural que conduce a la innovación. Esta surge al plantearnos una serie de cuestiones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje durante los últimos años. ¿Ha variado este proceso? ¿Qué ha cambiado?

Si nos centramos en la labor docente del profesorado, podemos hacer grosso modo una clasificación entre aquellos docentes cuya preocupación principal está en el contenido, quienes hacen hincapié en los conceptos y procedimientos necesarios para adquirir un conocimiento instrumental, de aquellos otros que se centran en mantener este proceso de enseñanza actualizado, atendiendo a su funcionalidad y contemporaneidad, al cambio de comportamiento de los alumnos en distintas situaciones y al uso de medios tecnológicos. Sin embargo, pocos consiguen un equilibrio entre el predominio de los contenidos y el empleo en contexto de tales conocimientos, en continuo cambio y desarrollo.

Una mejora en educación siempre es un proceso lento en el que han de participar todos sus agentes. En particular, es importante que el profesorado en formación:

- Se adapte a los cambios sociales, de manera que el alumnado se sienta parte del proceso y facilite la adquisición de conocimiento.
- Potencie su capacidad para relacionar la teoría con la práctica.
- Genere, revise y transforme el conocimiento escolar, adaptándolo a situaciones y contextos educativos y sociales que son cambiantes.

Además, el desarrollo de una investigación educativa, junto con las competencias que se quieren promover en los escolares exigidas por la normativa, contribuirá y me ayudará a:

- Mejorar mi competencia en la materia.
- Diseñar estrategias de instrucción y de comunicación.
- Establecer objetivos y desarrollar su planificación educativa.
- Llevar a cabo prácticas de enseñanza adecuadas al desarrollo de los escolares.
- Adquirir habilidades de control del aula, mejora de la motivación del alumnado.
- Favorecer el reconocimiento de las diferencias individuales.
- Trabajar con estudiantes culturalmente diversos.
- Potenciar habilidades tecnológicas
- Desarrollar métodos y técnicas de evaluación.

2. JUSTIFICACIÓN DEL TEMA ESCOGIDO

A lo largo de este apartado profundizo en la motivación del presente estudio. Desarrollo inicialmente una breve reflexión sobre la enseñanza de la Geometría en Secundaria, y por qué es necesario que los alumnos y alumnas se formen en este ámbito matemático. Después, identifico el marco curricular en que se encuentra inserta la investigación, haciendo referencia a la normativa correspondiente y a los contenidos mínimos que debemos desarrollar en esta unidad.

2.1. MOTIVACIÓN DEL ESTUDIO

Cuando hablamos de enseñar Geometría es importante reflexionar sobre las razones. Un primer motivo es reconocer formas y cuerpos, interpretar las relaciones entre ellos en nuestro entorno inmediato e identificar los conceptos geométricos que los modelan, ya que la Geometría es la Matemática del espacio (Bishop, 1983). Esta nace de la necesidad de comprender el entorno inmediato.

El pensamiento geométrico se construye de manera intuitiva, producto de la interacción de las personas con el espacio. Enseñar geometría significa hacer avanzar a los alumnos en el conocimiento de la estructura de ese espacio de manera que, en algún momento, puedan prescindir de su contingencia física y tratar mentalmente las propiedades de imágenes y figuras junto con sus relaciones, es decir, alcanzar la abstracción. De esta manera se establecen relaciones que ya no son físicas sino que pertenecen a un espacio conceptualizado, y los razonamientos que se hagan acerca de las figuras geométricas, así como su validez, obedecen a reglas de abstracción y argumentación lógico-deductiva. Podrán inferir nuevas propiedades a partir de las que ya conocen.

La Geometría es una disciplina eminentemente visual (Hoffer, citado por Bressan, 2000). Los conceptos son reconocidos y comprendidos a través de la visualización. Esta habilidad es un primer acercamiento a los objetos geométricos, pero no podemos aprender Geometría sólo viendo una figura u otro objeto geométrico. Necesitamos enfrentarnos a diferentes situaciones donde los conocimientos adquieran sentido y la generalización de las propiedades pueda ser construida a través de múltiples razonamientos, y no sólo a partir de la percepción.

Sin embargo, la habilidad visual no es la única que desarrolla la Geometría, sino que también ésta es una excelente herramienta para otras competencias, como es la comunicación. El lenguaje está estrechamente ligado al pensamiento matemático-geométrico, y está presente en muchos aspectos: cuando se lee e interpreta la información de un problema; cuando se discute con los compañeros las posibles soluciones; cuando se expresa un resultado o procedimiento, o cuando se justifica. En todo este proceso, designar por su nombre a las propiedades geométricas, interrelacionar los objetos geométricos hacen de la Geometría un campo excelente para el desarrollo de esta habilidad.

Otra habilidad ligada estrechamente es el dibujo. Consiste en reproducir o construir gráficamente objetos geométricos, modelizándolos en base a una información que se obtiene de forma verbal (oral o escrita) o métrica. Las actividades relacionadas con esta habilidad promueven la capacidad de síntesis del alumno, la búsqueda de relaciones y de propiedades que están en la construcción que se le pide. La representación gráfica no debe entenderse sólo como un fin, sino que además es un medio para que los alumnos exploren, profundicen y construyan nuevos conocimientos.

En definitiva, nos proponemos incentivar el pensamiento geométrico para que emerja mediante una serie de actividades y tareas llevadas a cabo en el aula. La Geometría del Triángulo será, gracias a todas las cualidades que hemos mencionado, la herramienta que sirva de guía a los escolares para la adquisición de nuevos conocimientos y capacidades. Mostraremos a través del desarrollo de una serie de actividades, un avance del pensamiento lógico-deductivo, de la capacidad de expresión oral, de la manifestación de significados que atribuyen los alumnos a los conceptos y de los procedimientos que deben desarrollar. Estas tareas a las que se hace referencia constituyen un punto clave de esta investigación. Su diseño muestra un aprendizaje en orden creciente de complejidad y abstracción. Sólo así los alumnos y alumnas encontrarán en estas tareas un reto alcanzable que les proporcionará satisfacción resolver. Dichas tareas son analizadas en su correspondiente apartado, dentro del capítulo "Diseño de la investigación".

2.2. MARCO CURRICULAR

La investigación se centra en estudiantes de 3º E.S.O. Con la implantación de la LOMCE, se produce una nueva organización del currículo básico, que se estructura en materias troncales, específicas y de libre configuración autonómica. Las Matemáticas pertenecen al bloque de las asignaturas troncales. Estas se basan en el conocimiento por competencias, en una formación sólida y continua con el aprovechamiento, y se evaluarán al final de cada etapa.

El Ministerio de Educación y Cultura y Deporte publica el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Podemos encontrar el currículo que nos interesa en el "Anexo I. Materias del bloque de asignaturas troncales. Apartado 28. Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas."

A lo largo de este apartado, la normativa reconoce que la asignatura de Matemáticas contribuye al desarrollo de la competencia matemática, reconocida como clave por la Unión Europea. El eje fundamental del proceso de enseñanza-aprendizaje es la resolución de problemas y los proyectos de investigación, que será aquello en que nos centremos en el presente estudio empírico. En este proceso están involucradas otras competencias, como la comunicación lingüística, el sentido de iniciativa, la competencia digital, o la social y cívica. Puesto que la asignatura es de Matemáticas Aplicadas, se mostrará especial atención a la aplicación práctica en contextos reales frente a la profundización en aspectos teóricos. La asignatura se organiza en cinco bloques:

Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas
Bloque 2. Números y Algebra
Bloque 3. Geometría
Bloque 4. Funciones
Bloque 5. Estadística y probabilidad

El contenido del primer bloque está referido a valores, que podrían englobarse en dos modalidades: un primer tipos de contenidos con orientación social, que dan una proyección ética al sistema educativo y que sustentan la ciudadanía democrática, la igualdad y la tolerancia, la justicia y equidad, y un segundo tipo de contenidos de formación personal, que potencian la responsabilidad, el esfuerzo individual, la confianza en uno mismo y el sentido crítico, así como la curiosidad, el interés por el conocimiento y la creatividad, el espíritu emprendedor, la vida saludable, etc. Es un bloque de contenidos que se articulan sobre los procesos básicos e imprescindibles en el quehacer matemático, y es común a los dos cursos (3º y 4º de E.S.O.). Su desarrollo debe realizarse de modo transversal, es decir, simultánea y coordinadamente con el resto de bloques.

El contenido que vamos a estudiar pertenece al tercer bloque, Geometría, y en particular:

Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares**
Mediatriz, bisectriz, ángulos y sus relaciones, perímetro y área. Propiedades.	1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas.	1.1. Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo. 1.2. Utiliza las propiedades de la mediatriz y la bisectriz para resolver problemas geométricos sencillos. 1.3. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos en los que intervienen ángulos. 1.4. Calcula el perímetro de polígonos, la longitud de circunferencias, el área de polígonos y figuras circulares, en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas.

Este documento es una guía de contenidos mínimos que, como profesores, debemos de incorporar en nuestro proceso de enseñanza. Se trata de un documento descriptivo que enuncia unas expectativas, pero no determina su logro; tampoco que los contenidos sean correctamente ejemplificados a través de situaciones reales, contextualizados o explicados mediante diversos tipos de representación. El documento no contempla que la práctica se vea enriquecida con el uso de unos u otros recursos, instrumentales o tecnológicos. Estas serán las características de la planificación de la unidad didáctica que marcan la diferencia y faciliten en cada caso un buen desarrollo cognitivo del alumnado.

3. OBJETIVO DEL ESTUDIO

Como ya se ha dicho, el trabajo consta de dos partes. Por un lado un análisis de contenido, centrado en el significado de un tema del currículo de matemáticas de ESO (geometría del triángulo y área de figuras planas), que es un estudio teórico y conceptual; por otro lado un estudio empírico de los significados atribuidos por los escolares a determinados conceptos básicos de la geometría del triángulo mediante un cuestionario sobre algunos contenidos previamente adquiridos. El papel del análisis de contenido previo es servir de organizador, proporcionar categorías, para analizar las respuestas dadas por los alumnos mediante el estudio empírico. De este modo, podemos decir que nuestro cometido es doble:

En primer lugar, el objetivo del estudio teórico es "establecer diversos significados de los temas matemáticos escolares, que son conocimientos del profesor necesarios para marcar expectativas sobre el aprendizaje de los alumnos y para delimitar y diseñar tareas basadas en la concreción de unas demandas cognitivas." (Rico, 2008).

En segundo lugar, el objetivo del estudio empírico consiste en promover la reflexión escrita de un grupo de alumnos de 3º E.S.O. de Matemáticas acerca de algunas de las propiedades métricas de un triángulo para observar, analizar, interpretar y describir los argumentos que esos alumnos expresan y formulan sobre tales conceptos y relaciones. Para estructurar el estudio, se han elegido tres propiedades métricas de los triángulos, y cada una de ellas se analizará en una sesión individual. Dichas sesiones se insertarán intercaladas en el desarrollo de la Unidad Didáctica titulada "Lugares geométricos y área de figuras planas". El tiempo invertido para dicha unidad es de 7 sesiones, más las 3 de tareas específicamente relacionadas con la investigación, es decir un total de 10 sesiones. Las que corresponden a la investigación son la quinta, novena y décima sesiones. Dichas relaciones métricas son:

- Investigación 1. Sesión 9. Comparación métrica entre los lados de un triángulo (longitudes).
- Investigación 2. Sesión 10. Relación goniométrica entre los ángulos de un triángulo.
- Investigación 3. Sesión 5. En un triángulo rectángulo, relación entre los cuadrados construidos sobre sus lados (superficies).

3.1. OBJETIVOS PARCIALES

En relación al proceso de enseñanza-aprendizaje, a través del estudio empírico llevado a cabo, se pretende respecto a los alumnos:

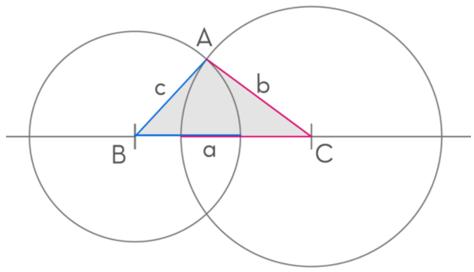
- Profundizar en su capacidad de respuesta, coherencia y el nivel de concreción ante preguntas no convencionales sobre relaciones y propiedades métricas de figuras planas.
- Reforzar su aptitud para argumentar y justificar las respuestas dadas.
- Mejorar su habilidad para traducir proposiciones matemáticas expresadas en lenguaje numérico o verbal a relaciones gráficas de tipo geométrico.

INVESTIGACIÓN 1

Objeto de análisis
Argumentos sobre la interpretación de la relación métrica entre los lados de un triángulo.

Enunciado
Todo lado de
un triángulo es menor que
la suma de los otros
dos y mayor que su diferencia.
a < b + c
a > b - c

Demostración Gráfica

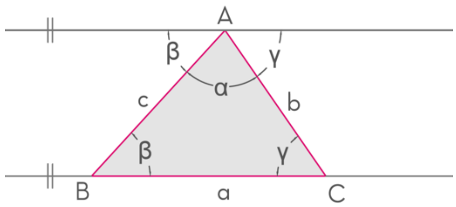


INVESTIGACIÓN 2

Objeto de análisis
Argumentos sobre la interpretación de la relación goniométrica entre los ángulos de un triángulo.

Enunciado
La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º
A+B+C=180º

Demostración Gráfica

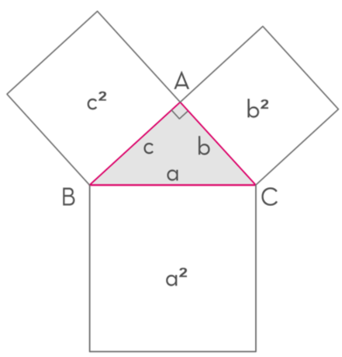


INVESTIGACIÓN 3

Objeto de análisis
Argumentos sobre la interpretación gráfica del Teorema de Pitágoras.

Enunciado
En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual a la suma del cuadrado de la hipotenusa.

Representación Gráfica



4. MARCO TEÓRICO

El marco teórico que se desarrolla en este capítulo trata dos aspectos relacionados con la investigación. En primer lugar, se presentan los antecedentes. Es una revisión bibliográfica en la que se recogen resultados obtenidos en estudios previos sobre el tema. No se trata de una revisión exhaustiva, sino de un conjunto de trabajos que, centrados en el tema de la geometría del triángulo, en concreto de las relaciones métricas y el teorema de Pitágoras, muestran trabajos de profesores interesados en el contenido pedagógico.

En segundo lugar, se abordará el análisis conceptual del contenido que se desarrolla en las sesiones de clase que envuelven al estudio empírico. Dicho análisis está basado en los trabajos publicados de D. Luis Rico Romero y D. José Luis Lupiáñez Gómez en los que se establece un método de análisis del significado de los conceptos matemáticos.

4.1. ANTECEDENTES

La revisión bibliográfica ha sido realizada utilizando la base de datos Google Académico y los descriptores usados han sido *didáctica de la matemática*, *enseñanza aprendizaje de la geometría*, *Teorema de Pitágoras*, y *Secundaria*. Puesto que el tema de estudio muy específico, se han seleccionado aquellas investigaciones que tienen relación con la que hemos llevando a cabo. Todos ellos han sido realizados hace menos de 10 años, y se centran de manera directa o indirecta en la pedagogía de la geometría y más concretamente en el acercamiento a los escolares del Teorema de Pitágoras a través de metodologías no convencionales. A continuación, resumiremos brevemente los aspectos clave de estas investigaciones:

BARRANTES, M.; BALLETBO, I.; FERNÁNDEZ, M.
Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. 2014
Enseñar Geometría en Secundaria

El objetivo general del artículo de investigación es "intentar que las concepciones y creencias de los profesores vayan evolucionando progresivamente hacia tendencias más constructivistas". En primer lugar, hacen una reflexión sobre lo que la enseñanza de la Geometría en Secundaria ha sido hasta ahora. Según los autores, la Geometría ha ido aumentando su presencia en el currículo como disciplina que mejora el conocimiento del espacio y fuente de modelos y situaciones útiles en otros contextos.

La utilidad de la Geometría es "conectar a los alumnos con el mundo en el que se mueven". Tiene gran influencia en los alumnos, ya que muchas veces la capacidad espacial es superior a su destreza numérica, por lo que la Geometría puede servir de puente hacia un razonamiento lógico. Sin embargo, en el proceso de enseñanza-aprendizaje, la metodología basada en la memorización de conceptos, teoremas y fórmulas ha perjudicado la intuición como primera manera de acceder al conocimiento geométrico. Por eso los autores proponen un cambio metodológico, desde un trabajo basado en la resolución de problemas en que el alumno transforme su conocimiento empírico en otro más estructurado a través de la guía del profesor.

Estos problemas deben estar contextualizados en situaciones reales y reforzar las competencias matemática y lingüística. Muchos investigadores han desarrollado actividades para aplicar esta metodología. De entre todos ellos, interesan las de Flores (2002), ya que utiliza puzzles como medio para el desarrollo de destrezas y habilidades. Así mismo, Luelmo (1997) muestra la importancia de los instrumentos de dibujo para resolver problemas, o Pérez (2000) hace una descripción de aplicaciones disponibles en Internet para el programa Cabri. Actualmente se considera imprescindible trabajar en el aula con software de modelización geométrica. En definitiva, "la nueva culturización exige un cambio en los contenidos y metodología de enseñanza de la Geometría en Secundaria, más orientados hacia metodologías activas como la resolución de problemas".

BARRETO, J.C.
Universidad Nacional Abierta. Centro Local Yaracury. Área de Matemática.
Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado". Departamento de Matemáticas. 2008
Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática

En este artículo se utiliza un enfoque histórico como propuesta metodológica que actúe como motivación para el alumno. Basado en este enfoque, se realiza un estudio en torno a la deducción del Teorema de Pitágoras a través de una serie de actividades, que parten de nociones de áreas de figuras geométricas elementales para llegar al estudio de productos notables de la suma y de la diferencia del cuadrado de dos cantidades. Estas deducciones transforman el álgebra en geometría a través de un método, de manera que las reglas no se mecanizan sino que se aumentan y relacionan conceptos adquiridos previamente, de tal manera que se logre una mejor comprensión.

En este estudio se le da una gran relevancia a la visualización como elemento íntimamente relacionado con la geometría de figuras. Los estudios más importantes sobre los procesos cognitivos (Duval, 1998) (Torregrosa, G; Quesada, H: 2007) afirma que este razonamiento se basa en aplicar las afirmaciones matemáticas que les corresponden algebraicamente. Para diagnosticar la capacidad de deducción geométrica se propusieron una serie de actividades en el marco de diversos eventos nacionales e internacionales, donde participaron estudiantes y profesores del área de Matemáticas. En estas actividades los alumnos parten de situaciones netamente intuitivas, como triángulos rectángulos notables y triángulos isorrectángulos para generar demostraciones geométricas del Teorema de Pitágoras, utilizando regla y compás, así como cartulinas y material manipulativo en general. Todas estas actividades están relacionadas con las que en nuestro estudio se llevaron a cabo.

Por ejemplo, en la primera de estas, se utilizó un puzzle con la terna pitagórica 3, 4, 5, dividiendo los cuadrados en otros más pequeños, para demostrar el teorema.

VARGAS, G.; GAMBOA, R.
Revista Uniciencia Vol. 27 Nº1. Enero-junio 2013
La enseñanza del Teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso de Geogebra, según el modelo Van Hiele

El artículo muestra los resultados de una experiencia llevada a cabo con alumnos de secundaria en torno al Teorema de Pitágoras, apoyado en el uso del software Geogebra y en el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele. La estrategia metodológica consistió en comparar los resultados de los razonamientos de doce actividades en alumnos que habían trabajado sobre ellas con el software y otros que lo habían hecho de manera tradicional. Sin embargo, en el presente artículo sólo se detallan los resultados de una actividad. El estudio fue de tipo cualitativo.

El modelo de Van Hiele consiste en que el estudiante muestre una serie de particularidades a través de cinco niveles de razonamiento geométrico. En el primer nivel, las figuras son reconocidas por el alumno como un todo, y no diferencia partes o componentes. Puede reproducir copias de la figura, o reconocerla y usar para ellos un lenguaje básico comparándola con elementos del entorno. En el segundo nivel, el individuo ya reconoce partes, pero no logra establecer relaciones entre las propiedades de distintas familias de figuras. Las establece, en todo caso, de forma empírica a través de la manipulación, pero no puede elaborar definiciones. En el tercero, el estudiante determina propiedades y reconoce como se derivan unas de otras, estableciendo interrelaciones entre las figuras y sus familias. Sin embargo el razonamiento sigue basado en la manipulación, en demostraciones no entendidas en su globalidad, por lo que no emite razonamientos lógicos. Es lo que ocurre en el nivel cuatro, en el que el individuo ya sí comprende la naturaleza axiomática de las Matemáticas y le permite deducir una propiedad de otra. Sin embargo, no ve la necesidad de rigor en los razonamientos. Eso llega en el último nivel, el quinto, en el que se puede alcanzar un buen grado de rigor para ver la geometría como algo abstracto, y que sólo se alcanza en estudiantes muy avanzados, de niveles superiores y con buena preparación en geometría.

BARRETO, J.C.
Revista Premisa Nº15. 2013
Deducción general del Teorema de Pitágoras en trigonometría: de la didáctica de la geometría hasta la didáctica del análisis matemático.

En este artículo, el autor parte de la deducción del teorema de Pitágoras, y la realiza usando el teorema para triángulos rectángulos en triángulos oblicuángulos. De esta manera se genera una relación entre un lado en término de los otros dos, más el doble producto de un lado por la proyección ortogonal de la altura sobre ese lado. Esto le permite enunciar la conocida Ley del Coseno, cambiando la proyección por la razón trigonométrica del coseno. Después, utiliza el cálculo integral y lo generaliza a través del uso del análisis matemático.

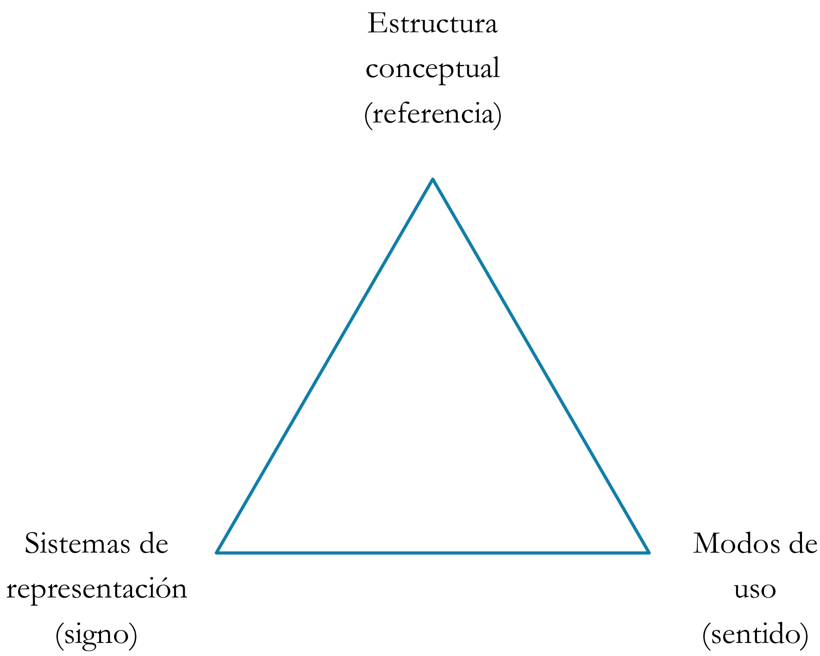
Lo interesante de este estudio son las conclusiones. Entre los procesos cognitivos, además de abstraer, se encuentran los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar, los cuales se desarrollan progresivamente durante todo el proceso de aprendizaje de los estudiantes en el estudio de la matemática, partiendo de la geometría para llegar al análisis. En definitiva, lo que el estudio demuestra es que podemos partir de conceptos básicamente geométricos para llegar a otros más complejos, como el cálculo integral, a base de aplicaciones matemáticas y generalizaciones.

4.2. ESTUDIO DEL SIGNIFICADO DE UN CONTENIDO

Según la definición de Rico, Marín, Lupiáñez y Gomez (2008):

> "El Análisis de Contenido es una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las Matemáticas Escolares. El Análisis de Contenido es parte del Análisis Didáctico, que configura un conjunto de procedimientos necesarios para llevar a cabo el diseño y la planificación de unidades didácticas. Mediante este Análisis se desarrollan las **capacidades del profesor de matemáticas para establecer diversos significados de los temas matemáticos escolares, que son conocimientos necesarios para marcar expectativas sobre el aprendizaje de los alumnos y para delimitar y diseñar tareas basadas en la concreción de unas demandas cognitivas**. Es decir, el Análisis de Contenido contribuye al desarrollo de capacidades profesionales para la enseñanza vinculadas con la competencia de planificación."

Rico (2016) establece para realizar el citado Análisis de Contenido matemático tres componentes del significado. Estas tres componentes se apoyan en los estudios de Frege (1996), quien estableció la diferencia entre signo y significado de un término y, dentro del significado, distinguió entre sentido y referencia de un mismo término. De este modo, las relaciones entre estos tres componentes forman un triángulo semántico para los objetos, en este caso conceptos matemáticos, y que vienen dados por el signo o término con el que se expresa, la referencia o estructura conceptual, y los sentidos o modos de uso.



> "El significado de un concepto matemático consta de tres componentes: los **signos**, gráficos y notaciones que lo representan y el término que lo nombra; la **referencia**, o definición del concepto y la estructura lógica en que se inserta; y los **sentidos, o modos** en que puede ser entendido, aplicado o interpretado. Conocer un concepto matemático es conocer su definición, representarlo, mostrar sus operaciones, relaciones y propiedades y los modos de uso, interpretación y aplicación a la resolución de problemas." L. Rico (2016)

4.2.1. ESTRUCTURA CONCEPTUAL O REFERENCIA

Veamos el primer organizador, las estructuras conceptuales

> "El contenido matemático se entiende como un conjunto de conceptos, procedimientos y estructuras acerca de un tópico matemático escolar determinado que los responsables del currículo seleccionan, los profesores organizan y enseñan y los escolares aprenden y utilizan." (Rico, 2016).

Podemos encontrar el contenido que deseamos desarrollar en los libros de texto. De entre todas las ofertas que existen hoy en el mercado, el Departamento de Matemáticas del I.E.S. en el que desarrollo la investigación seleccionó el libro "Matemáticas 3 ESO, Proyecto Los Caminos del Saber, Editorial Grazalema Santillana". Sin embargo, en el desarrollo de esta unidad, no sólo se empleará el libro de texto, sino que ciertos aspectos se ampliarán con otro tipo de recursos didácticos. Además, no se verá el contenido completo del tema. Es por ello que el libro se considerará un recurso más, y es necesario realizar un análisis de contenido a fin de fijar cuales son los conocimientos que será necesario transmitir a los alumnos, para así alcanzar el aprendizaje deseado.

Para llevar a cabo un análisis de contenido matemático, es necesario establecer una serie de organizadores. Los organizadores son categorías, que permiten estudiar cada dimensión del currículo, mediante unos componentes propios en cada caso. El sistema que se ha elegido para analizar el contenido en el presente trabajo de investigación (Rico, 2016) se centra en el primer organizado –Estructura conceptual– cuyos componentes se organizan en tres campos (conceptual, procedimental y actitudinal), de los que sólo nos interesan los dos primeros; y tres niveles de complejidad (primero, unidades de información; segundo, abstracción y generalización; y tercero, estructuración).

Organizadores para análisis de la Estructura conceptual	
Conceptuales	Procedimentales
Primer Nivel: Unidades de información	
Hechos	Destrezas
Términos/Notaciones	Operaciones
Convenios	Reglas
Resultados	Algoritmos
Segundo Nivel: Abstracción y generalización	
Conceptos	Razonamientos
Extensión	Inductivo
Comprensión	Deductivo
Relaciones	Analógico
Tercer Nivel: Estructuración	
Estructuras conceptuales	Estrategias

De este modo, para utilizar esta técnica de análisis: en primer lugar se identificarán los elementos que constituyen los tres niveles del campo conceptual del ámbito de estudio que estamos analizando, la Geometría del triángulo, (hechos, conceptos y estructuras); y en segundo término, se enumerarán los elementos de los tres niveles del campo procedimental (destrezas, razonamientos y estrategias). Mas adelante consideramos explícitamente los otros dos organizadores del contenido: Sistemas de representación y Sentidos o modos de uso.

Hechos

Términos

-Mediatriz	-Triángulo rectángulo	-Área
-Bisectriz	-Triángulo acutángulo	-Perímetro
-Mediana	-Triángulo obtusángulo	-Circunferencia
-Altura	-Triángulo equilátero	-Polígono (regular e irregular)
-Circuncentro	-Triángulo isósceles	-Apotema
-Incentro	-Triángulo escaleno	-Cuadrado
-Baricentro	-Teorema de Pitágoras	-Rectángulo
-Ortocentro	-Hipotenusa	-Rombo
-Triángulo	-Cateto	-Romboide
-Lado	-Diagonal (de un rectángulo)	-Círculo
-Vértice		-Trapecio

Notaciones

-A, B, C (vértices de un triángulo)	-G (baricentro)
-a (hipotenusa), b, c (catetos)	-O (circuncentro)
-α, β y γ (ángulos de un triángulo)	-H (ortocentro)
-A (área)	-I (incentro)

-P (perímetro)
-b (base de un polígono)
-B (cuando hay dos, base mayor de un polígono)
-h (altura de un polígono)
-d (diagonal de un polígono)
-D (cuando hay dos, diagonal mayor de un polígono)
-r (radio de una circunferencia)

Convenios

- Los polígonos (excepto el rombo) se dibujan apoyados sobre uno de sus lados.
- Los triángulos rectángulos se suelen dibujar apoyados sobre la hipotenusa, para mejorar la visualización de los teoremas del cateto y de la altura.

Resultados

- Con centro en el circuncentro, y radio la distancia del circuncentro a cualquier vértice, se puede dibujar una circunferencia que pasa por los tres vértices: la circunferencia circunscrita al triángulo.

- Con centro en el incentro, y radio la distancia del incentro a cualquier lado, se puede dibujar una circunferencia que pasa por los tres lados del triángulo: la circunferencia inscrita.
- El baricentro es el punto cuya distancia a cada vértice es el doble que su distancia al punto medio del lado opuesto.
- El ortocentro está situado: dentro en un triángulo acutángulo; en uno de sus vértices en un triángulo rectángulo, y en el exterior en un triángulo obtusángulo.

Conceptos

Caracterización, definición

-Clasificación de triángulos según sus ángulos. Ángulo agudo, recto y obtuso.
-Clasificación de triángulos según sus lados. Equilátero, isósceles y escaleno.
-Rectas notables en un triángulo: Mediatrices, bisectrices, medianas y alturas de los lados de un triángulo, y puntos donde se cortan: circuncentro, incentro, baricentro y ortocentro.
-Teorema de Pitágoras.
-Longitud, superficie, área. Polígono regular.

Relaciones

-Relaciones métricas en un triángulo:
    -Entre las longitudes de sus lados.
    -Entre sus ángulos.
    -En un triángulo rectángulo, entre las áreas de los cuadrados apoyados en los catetos y el cuadrado apoyado en la hipotenusa.

Estructuras

-Plano: puntos y rectas. Incidencia de rectas, paralelismo. Segmentos, ángulos; perpendicularidad. Medida de ángulos.
-Figuras en el plano. Clasificación de figuras planas. Polígonos.
-Métrica en el plano. Distancia Euclidiana. Plano euclídeo.
-Relaciones métricas entre los lados de un triángulo; medida de los ángulos de un triángulo.
-Relación métrica entre las áreas de figuras semejantes construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo. Escala.

Destrezas

-Uso de juego de reglas, compás y transportador de ángulos.
-Trazado de rectas paralelas y perpendiculares.

-Trazado de rectas y puntos notables de un triángulo, (tanto a través de procedimientos clásicos sobre papel, con juego de reglas, como a través de herramientas tecnológicas y el uso de software específico por ordenador).
-Aplicación del teorema de Pitágoras para el cálculo de la dimensión de uno de los lados desconocido de un triángulo rectángulo, el cálculo de la altura de un triángulo isósceles y la diagonal de un rectángulo.
-Cálculo de áreas de figuras planas. Aplicación de fórmulas.

Razonamientos

-Deductivo:

-Demostración gráfica del teorema de Pitágoras con objetos manipulativos.
-Ensayo error de las relaciones entre los lados de un triángulo.
-Demostración matemática de la suma de los tres ángulos de un triángulo.

-Inductivo:

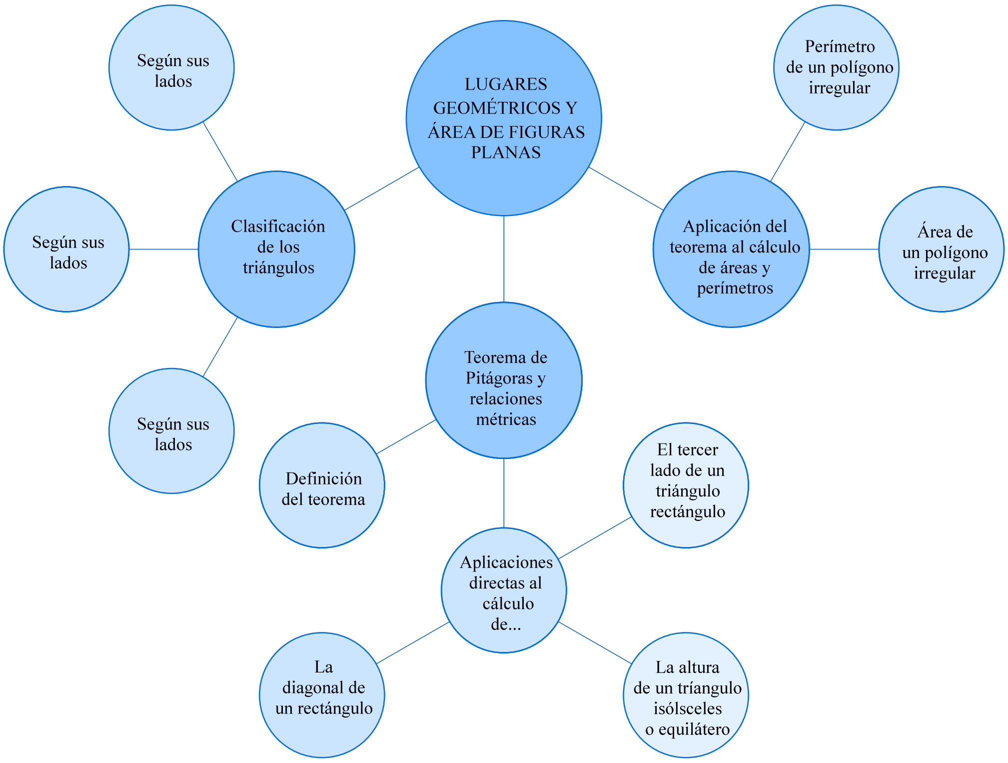
-Reconocimiento de fórmulas.
-Reconocimiento de relaciones fundamentales de longitud, ángulo y superficie.
-Obtención de fórmulas algebraicas a partir de representaciones gráficas y verbales.

Estrategias

-Aplicación de razonamientos deductivos a la resolución de problemas en contextos reales.
-Uso de formulas algebraicas para expresar razonamientos y deducciones obtenidos a partir de la manipulación de objetos y dibujos geométricos.

Focos conceptuales y mapa conceptual

1. Estudio de los triángulos	**2. Teorema de Pitágoras y relaciones métricas**	**3. Aplicación del teorema al cálculo de áreas**
- Clasificación de triángulos según sus lados. - Clasificación de triángulos según sus ángulos. - Rectas y puntos notables de un triángulo.	- Enunciado verbal, numérica y gráfica del teorema de Pitágoras. - Cálculo del tercer lado de un triángulo rectángulo conocidos los otros dos. - Aplicaciones del teorema de Pitágoras al cálculo de la altura de un triángulo y de la diagonal de un rectángulo.	- Cálculo del perímetro de un polígono irregular. - Cálculo del área de un polígono regular.



4.2.2. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN O SIGNO

Si vemos ahora el segundo organizador, los sistemas de representación (Rico, 2016):

> "Estos sistemas constituyen un conjunto organizado de notaciones, símbolos y gráficos, dotado de una serie de reglas y convenios, que permite expresar determinados aspectos y propiedades de un concepto matemático. Esta relación sistémica se ajusta al carácter estructural de las matemáticas, pues los conceptos matemáticos no son entes aislados. Una estructura matemática es un conjunto de conceptos, procedimientos y relaciones entre ellos. (Conceptos y procedimientos ya se han analizado anteriormente) Los sistemas de representación recogen esa riqueza de vínculos, de modo que organizan formas de expresión consensuadas, y reglas para su manejo y transformación."

Los sistemas de representación organizan las diferentes maneras de plasmar y comunicar las ideas, es decir, los conceptos matemáticos. Dicha variedad es la que nos permite expresar estos conceptos con un mayor potencial de comunicación y operatividad. Cada sistema de representación destaca alguna peculiaridad del concepto que expresa. Cuando hablamos de conceptos matemáticos, existen diversos campos o sistemas de representación. De todos ellos y en relación a nuestro tema de estudio, analizaremos tres tipos: verbal, simbólico y gráfico.

Verbal

Son aquellos que expresan verbalmente los conceptos, propiedades, razonamientos, matemáticos, etc. ya sea de manera oral o escrita. Un ejemplo de este sistema de representación sería:

- "el área es una medida de extensión de superficie. Es un concepto métrico que requiere que se especifique una medida en función del espacio donde se define"
- "las diagonales de un rectángulo son las líneas que unen dos vértices opuestos"
- "cuando tenemos un triángulo rectángulo, podemos hallar la longitud del tercer lado, conocida la de los otros dos, mediante la aplicación del teorema de Pitágoras"

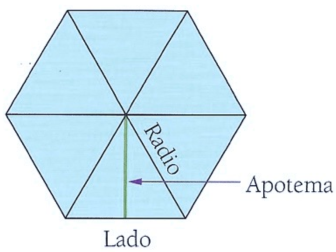
Simbólico: algebraico y numérico

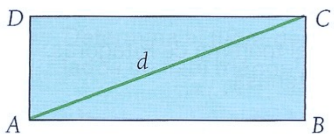
El mismo tipo de información que hemos expresado previamente, puede hacerse a través de notaciones numéricas, simbólicas o expresiones algebraicas. Si tomamos de nuevo los ejemplos anteriores, podemos escribir del siguiente modo:

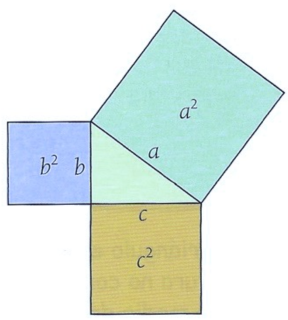
$$A = \frac{P \cdot a}{2} \qquad a^2 = b^2 + c^2$$

Gráfico

La representación gráfica es fundamental en este tema de estudio, y necesaria muchas veces para que los conceptos matemáticos se comprendan con mayor rapidez y de manera más precisa. Además, apoyan la definición y construyen imágenes que, en muchos casos, son más fáciles de entender y recordar que las verbales. Si continuamos con los ejemplos que antes hemos visto, serían:







4.2.3. SENTIDOS O MODOS DE USO

Por último, los conceptos matemáticos "alcanzan su máxima expresión cuando se piensan con plenitud de sentido" (Rico, 2016) y esto se logra cuando se entienden sus diferentes modos de uso. El tercer organizador se ocupa de expresar los conceptos en variedad de situaciones, comprender los tipos de problemas que resuelven, dominar los términos propios del concepto y conocer los fenómenos que organiza. El análisis de contenido estudia el sentido de los conceptos mediante los términos (modos de uso que lo identifican), los contextos (cuestiones a las que da respuesta), los fenómenos (que le dan origen, y a los que organiza) y las situaciones en las que se aplica (Rico, 2016).

Términos

El estudio de un concepto empieza por su definición. Esta conlleva la revisión de sus distintas interpretaciones, así como la elección razonada de aquellas que se le ajustan. A veces, la definición general es la que se ajusta al concepto matemático al que nos referimos. Sin embargo, hay veces que no es así. Son estos términos equívocos los que se analizarán en este apartado, en el que podremos ver la definición que aparece de dichos términos en los diccionarios, así como los diversos sinónimos que expresan la noción que se desea conocer.

Los términos básicos son: lado, ángulo, polígono y triángulo; recto y perpendicular. Cuando utilicemos dichos términos, debemos expresar unívocamente el término, verbalizando la definición del concepto o señalándolo en las representaciones gráficas.

Contextos

Los contextos establecen el ámbito funcional para cada concepto matemático, es decir cómo dichos conceptos atienden y responden como instrumentos de conocimiento a unas necesidades intelectuales o prácticas determinadas. De esta manera, proporcionan precisión técnica y delimitan el sentido de un concepto. En nuestro caso de estudio, los contextos a los que estamos haciendo referencia, es decir para qué sirven los conceptos matemáticos que vamos a enseñar, son:

- Medir; por ejemplo: el perímetro de un polígono irregular.
- Dibujar; por ejemplo: trazar las rectas y puntos notables de un triángulo.
- Utilizar el teorema de Pitágoras, para:
    - Comprobar si un triángulo es rectángulo dada la longitud de sus tres lados.
    - Calcular la longitud del tercer lado de un triángulo rectángulo conocida la longitud de los otros dos.
    - Calcular la altura de un triángulo equilátero o isósceles.

    - Determinar la longitud de la diagonal de un cuadrado o un rectángulo conociendo las medidas de sus lados.
- Medir de manera directa, o a través de descomposiciones en figuras más simples, el área de un polígono.
- Calcular el área de un polígono descomponiéndolo en triángulos rectángulos.

Fenómenos

El análisis fenomenológico de un concepto es, según la definición de Freudenthal, la descripción de los fenómenos para los que tal concepto es un medio de organización, así como la relación que tiene tal concepto con esos fenómenos. Es por esto que aquí el análisis histórico es importante, ya que indaga sobre los problemas que dieron origen al concepto matemático.

Situaciones

Una situación es el conjunto de circunstancias, condiciones y características que envuelven al concepto matemático y que pertenecen al mundo que nos rodea. Cualquier tarea matemática viene asociada a una situación. Esta situación puede ser clasificada. El marco teórico del estudio PISA considera cuatro tipos de situaciones para analizar y categorizar las tareas que se incluyen en sus pruebas de evaluación. Estas son: personales, laborales, sociales y científicas. De este modo, las situaciones localizan los problemas y los ejemplifican, dotan de sentido al concepto en cuestión. En el desarrollo de este trabajo de investigación, las tareas que se proponen serán analizadas en este aspecto más adelante, cuando se concreten las tareas específicas que se van a llevar a cabo.

En el estudio empírico de análisis de respuestas que se ha llevado a cabo, los argumentos de los alumnos son estudiados utilizando estos los tres componentes que hemos empleado para el estudio del significado del contenido matemático escolar (estructura conceptual, sistemas de representación y modos de uso). No todos estos organizadores han sido de la misma utilidad ni aplicados del mismo modo, por lo que no tienen el mismo peso a la hora de realizar el análisis. De acuerdo con el diseño no ha habido situaciones más allá de las estrictamente escolares, y el sentido de los conceptos trabajados responde a un único contexto. Así mismo, los sistemas de representación empleados han sido exclusivamente el verbal y gráfico. Por otra parte, el aspecto más importante del análisis tiene que ver con la terminología empleada, con cómo los alumnos han expresado los conceptos trabajados previamente en clase y cómo han desarrollado una serie de procedimientos, argumentado sobre ellos y razonado sus respuestas.

5. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

Para la realización de la investigación se emplean métodos descriptivos, ya que resultan bastante adecuados en el campo educativo y permiten la recogida de información detallada. Sin embargo, antes de entrar de lleno en la metodología del estudio, veremos una breve descripción del contexto de la intervención en que se desarrolla. Después se describirá con detalle cómo se llevará a cabo la recogida de información. Una vez descrito lo observado y llevado a cabo el estudio, en el siguiente epígrafe se analizarán los datos obtenidos.

5.1. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Como ya se ha dicho, los procesos de investigación surgen para dar respuesta a las necesidades de una realidad educativa y para, finalmente, implementar innovaciones y analizar su eficacia. Para ello es útil formular juicios de valor sobre una situación (evaluación) y establecer las causas que inciden sobre ella (diagnóstico) para finalmente intervenir y valorar el grado de consecución de los objetivos educativos. La investigación que se llevará a cabo es un estudio empírico, que sigue una serie de pasos:

1. Contexto e identificación de necesidades
2. Diagnóstico de la situación
3. Diseño y desarrollo de una o varias tareas
4. Realización y puesta en práctica de las tareas
5. Identificación de datos, análisis y evaluación de los resultados obtenidos

Para llevar a cabo la recogida de información en este estudio se diseña y aplica un cuestionario, instrumento usual de la metodología descriptiva en investigación educativa. Las ventajas de este instrumento son: que es fácil de diseñar y aplicar, que facilita la comparación entre individuos y que su anonimato facilita la libertad de respuesta. Sus mayores inconvenientes son que sus preguntas son difíciles de enunciar con precisión y que los sujetos se fatigan cuando hay muchas cuestiones. Además, conviene delimitar el alcance y profundidad de la información que se busca.

5.2. CONTEXTO E IDENTIFICACIÓN DE LAS NECESIDADES

Esta investigación educativa se ha llevado a cabo en el I.E.S. Virgen de las Nieves (Granada) en un grupo natural con un total de 15 alumnos. En la asignatura impartida, Matemáticas Aplicadas en 3º de E.S.O., los alumnos provienen de una división heterogénea de los grupos A y B. La puesta en práctica de la actividad tuvo lugar en el mes de abril, durante los últimos días del periodo de la asignatura de Prácticas en el Máster de Profesorado de ESO y Bachillerato, al que corresponde este estudio.

El periodo de prácticas duró en total 27 días lectivos, del 17 de febrero al 6 de abril. De ellas, tres formaron parte de la actuación concreta de investigación (las sesiones 5, 9 y 10), y una fue de evaluación (la sesión 8). El horario de impartición de las clases fue los lunes de 10:15 a 11:15, los martes de 13:45 a 14:45, los miércoles de 9:15 a 10:15 y los viernes de 10:15 a 11:15.

Marzo-Abril 2016						
14	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
	Sesión 1	Sesión 2				
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**
28	**29**	**30**	**31**	**1**	**2**	**3**
	Sesión 3	Sesión 4		**Sesión 5**		
4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Sesión 6	Sesión 7	Sesión 8 Evaluación		**Sesión 9**		
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
Sesión 10						

5.3. DIAGNÓSTICO DE LA SITUACIÓN

La investigación surge para dar respuesta a algunos de los problemas que se presentan en este grupo y que se han observado durante el primer periodo de prácticas. En general, los alumnos muestran un interés muy limitado por el aprendizaje de las matemáticas, al igual que en otras materias. Hay además grandes diferencias de actitud entre ellos. Presentan ciertas carencias sobre los contenidos y conceptos previos que ya deberían conocer, y recuerdan otros con dificultad. Si bien la mayoría no se encuentran interesados, hay dos que si muestran mayor interés que el resto. Como último dato a destacar, dos de los alumnos son repetidores, y una de las alumnas procede del grupo de PMAR, ya que presenta muy buenas habilidades matemáticas.

En definitiva, se trata de un grupo bastante heterogéneo, donde aprueba un porcentaje bastante elevado de los alumnos y alumnas (en torno al 70%) pero en el que se imparten los contenidos mínimos, el interés por la asignatura es escaso y donde se presta poca atención a la heterogeneidad del alumnado que lo forma.

5.4. DESARROLLO DE UN PLAN DE ACCIÓN

Para tratar de abordar los objetivos enunciados se llevaron a cabo un total de tres actuaciones. Tales actuaciones se encuentran intercaladas en el tema que se estudia, ya que tienen relación con su contenido. Al comienzo de cada una de las sesiones se explica en qué consiste la tarea propuesta, cómo se va a llevar a cabo y qué material se necesita (y será proporcionado en todos los casos). Se especifica que estas actividades no serán valoradas para la calificación ya que sólo sirven para el estudio que estamos realizado. La evaluación forma parte de las sesiones de la unidad didáctica y del contenido que se evalúa; aunque relacionado con estas tareas, no será el que aquí se desarrolle. Cada una de las sesiones está preparada para una duración de 30 minutos de realización del ejercicio y otros 15 para responder a las preguntas que se plantean.

5.5. PUESTA EN PRÁCTICA DE LA INTERVENCIÓN EDUCATIVA

Antes de proceder con el análisis de las sesiones de clase relacionadas con la investigación, se presenta un breve resumen de cada una de las sesiones pertenecientes a la unidad didáctica en la que se insertan.

5.5.1. DESARROLLO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Durante algunas de las sesiones el libro utilizado fue "Matemáticas 3 ESO, Proyecto Los Caminos del Saber, Editorial Grazalema Santillana", que es el que los alumnos están acostumbrados a utilizar; las páginas correspondientes al tema impartido (Lugares geométricos y áreas de figuras planas) se encuentran en el Anexo I. Libro de texto.

Sesión 1. Martes, 15 de marzo.

La primera sesión se desarrolla introduciendo el tema, recordando conceptos previos y aprendiendo algunos nuevos. En primer lugar recordamos todos juntos la clasificación de triángulos según sus lados y según sus ángulos, cómo se calculaba el perímetro de figuras regulares e irregulares y qué es la apotema de un polígono regular. Voy haciendo preguntas salteadas y la participación es muy buena. Por lo general todos se lanzan a contestar y recuerdan bien los conceptos que necesitarán para adquirir otros nuevos en este tema. Después, realizan unos ejercicios sencillos de manera individual, que aparecen en la primera página del tema, y pasamos a ver conceptos nuevos.

Explico pausadamente las rectas notables de un triángulo: mediatrices, bisectrices, medianas y alturas y el nombre de los puntos donde se cortan cada una de ellas: circuncentro, incentro, baricentro y ortocentro. Cada uno anota en su cuaderno las definiciones y alguna regla o propiedad relativa al punto notable. Una vez vista la teoría, pasamos a responder todos juntos algunas cuestiones y preguntas que se plantean en el elenco final del tema. De esta manera identifico si los alumnos han comprendido bien lo explicado. Al ser un grupo pequeño, puedo darme cuenta cuando alguno de los alumnos se encuentra perdido, y puedo así preguntarles qué parte no han comprendido bien, resolviendo sus dudas yo misma o a través de algún compañero que lo explica de otro modo.

Sesión 2. Miércoles, 16 de marzo.

Para reforzar todo lo aprendido en la sesión anterior, dado que los conceptos son eminentemente geométricos y es cómodo trabajar con herramientas informáticas, vamos a la sala de ordenadores y realizamos unos ejercicios que he preparado para Geogebra.

Gran parte de los alumnos y alumnas manejan bien el programa y siguen las instrucciones de los ejercicios preparados. No presentan apenas problemas con la interfaz de dibujo, pero algunos no recuerdan bien los conceptos y no entienden qué tienen que hacer. Se ayudan unos a otros y yo voy resolviendo las dudas más importantes. Pocos alumnos se encuentran totalmente perdidos y otros avanzan con rapidez, por lo que me detengo en ayudar a los que lo necesitan mientras los demás avanzan. La ficha de la actividad se encuentra en el Anexo II. Actividad con Geogebra.

Sesión 3. Martes, 29 de marzo.

A la vuelta de vacaciones, han transcurrido casi dos semanas desde la última sesión. Por lo tanto, recuerdo todo lo visto anteriormente durante la primera mitad de la clase. Para apoyar el conocimiento teórico, he preparado unas fichas que a su vez me servirán para la evaluación de esta primera parte del tema, dejando el contenido restante para el examen escrito. Esta se encuentra en el Anexo III. Actividad de dibujo a mano. Comenzamos haciendo juntos los primeros dos ejercicios, y les dejo los cuatro restantes como tarea para casa, que deberán entregar el día del examen y contará para la evaluación.

La otra mitad del tiempo de clase, la dedico a recordar y explicar el teorema de Pitágoras, y los alumnos escriben en su cuaderno la definición literal del teorema. Después, vemos tres ejercicios en los que usamos el teorema de Pitágoras para:

- calcular la hipotenusa conocidos dos catetos
- calcular un cateto conocidos la hipotenusa y el otro cateto
- comprobar si un triángulo es rectángulo conocidas las medidas de sus 3 lados

Luego cada uno realiza en su cuaderno un ejercicio de cada tipo, de manera individual.

Sesión 4. Miércoles, 30 de marzo.

Esta sesión la dedicamos entera a reforzar lo aprendido sobre el teorema de Pitágoras y sus aplicaciones de cálculo. Para ello, primero les explico con ejemplos cómo podemos utilizarlo para calcular la altura de un triángulo equilátero o isósceles, o la diagonal de un rectángulo.

A su vez les voy haciendo preguntas para que razonen el procedimiento en lugar de describírselo de manera directa. De esta manera entiendo que es más útil ya que luego tendrán que hacerlo solos, aplicando lo aprendido a distintas situaciones. Luego hacemos juntos tres ejercicios más.

Una vez los han comprendido y copiado en el cuaderno, hacen en clase solos los ejercicios 45-49 del libro, preguntando dudas en clase. Al final, los corregimos todos juntos. Es complicado intentar que todos los hagan al mismo ritmo, ya que hay bastante diferencias de nivel entre los alumnos de esta clase. Por eso, suelo ayudar a los que tienen más dificultad para comprender lo que se pide, y me apoyo en los que van más rápido para que ayuden a su vez a sus compañeros.

Sesión 6. Lunes, 4 de abril.

En la primera parte de la sesión los alumnos realizan ejercicios para reforzar el aprendizaje del teorema de Pitágoras. Utilizo la relación que viene al final del tema en el libro, y hacemos los ejercicios 53-55. Cuando todos han terminado, los corregimos juntos en la pizarra.

Durante la segunda parte de esta sesión el aprendizaje adquirido sobre el teorema de Pitágoras se aplicará al cálculo de áreas. Para esto, comienzo la clase repasando el cálculo de los polígonos regulares: triángulo, cuadrado, rectángulo, trapecio, trapezoide y polígono regular de más de cuatro lados. Recordamos juntos las fórmulas. La mayoría de los alumnos y alumnas participan y recuerdan cómo se calculaban en las figuras. Después las aplicamos en casos prácticos directos. Una vez que lo han comprendido, muestro casos en los que falta algún dato, y ha de ser hallado mediante el teorema de Pitágoras.

Sesión 7. Martes, 5 de abril.

A lo largo de la sesión previa a la evaluación escrita, los alumnos realizan una serie de actividades preparadas para reforzar los conceptos más relevantes que formarán parte de las preguntas de examen. Estas se encuentran en el Anexo IV, Actividades de refuerzo. Primero les explico que las actividades se centran en el cálculo de áreas, pero que desconocemos alguno de los datos necesarios para aplicar la fórmula, y lo tendremos que obtener utilizando el teorema de Pitágoras. La van realizando de manera individual, y al terminar cada página, los corregimos en la pizarra. Muchos participan saliendo a la pizarra a mostrar a sus compañeros el procedimiento que han seguido

Sesión 8. Miércoles, 6 de abril.

En la penúltima sesión los alumnos realizan una evaluación escrita. El examen se encuentra en el apartado Anexo V Prueba escrita.

5.5.2. DESARROLLO DE LAS SESIONES DE INVESTIGACIÓN

Durante el periodo de prácticas, se dedicaron tres sesiones de clase para llevar a cabo el trabajo de campo de la investigación, cuyo desarrollo se pasa a detallar. A pesar de que cronológicamente el contenido de estas tres sesiones no corresponde con el descrito a continuación, este modo ha parecido más sencillo para indagar en el conocimiento de los alumnos, ya que va desde lo más elemental a lo más complejo.

Investigación 1. Viernes, 8 de abril.

En esta sesión de investigación, el objetivo es que los alumnos identifiquen por sí mismos, guiados a través de una serie de tareas, la relación métrica que existe entre las longitudes de los lados de un triángulo. Para ello, mi propósito es que finalmente sean capaces de enunciar que en cualquier triángulo todo lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

El desarrollo de esta tarea requiere el uso del compás. Todos saben utilizarlo y lo han hecho ya en cursos anteriores, así que no habrá problema en esa cuestión. Ya que les llevará media hora, aprovecho el comienzo de la clase para repartir las calificaciones del examen que hicieron el día anterior, y resuelvo en la pizarra algunos de los ejercicios que plantearon dudas para los alumnos.

Finalmente, antes de repartir la tarea explico en qué va a consistir, que se realizará de manera individual y que, en este caso, en lugar de hacer las preguntas al final, se distribuyen conforme realizan el ejercicio. Por eso el tiempo será de 45 minutos. Esta vez han asistido 10 alumnos.

La tarea se compone de 3 actividades:

1. El segmento “a” es la base de un triángulo. Los segmentos “b” y “c” que aparecen dibujados bajo el enunciado son los otros dos lados del triángulo. Utiliza tu compás para transportar sus medidas sobre el segmento “a”. Después, dibuja un arco de circunferencia con cada una de las medidas y construye el triángulo. Nombra sus lados y sus vértices.

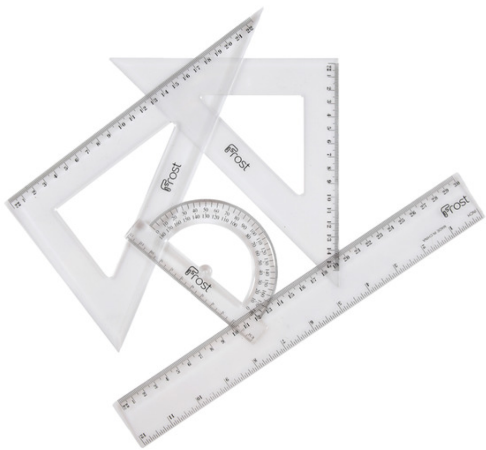
2. Repite la operación con estos tres segmentos. No olvides dibujar primero los segmentos “b” y “c” sobre cada extremo del segmento “a”.
    a. ¿Has conseguido dibujar el triángulo? ¿Por qué?
    b. ¿Qué tendría que ocurrir para que pudiésemos dibujarlo?
    c. Fijándonos en los segmentos “b” y “c” colocados sobre el segmento “a”, ¿qué podemos decir de la longitud de la suma de los segmentos “b” y “c” respecto de la longitud del segmento “a”?

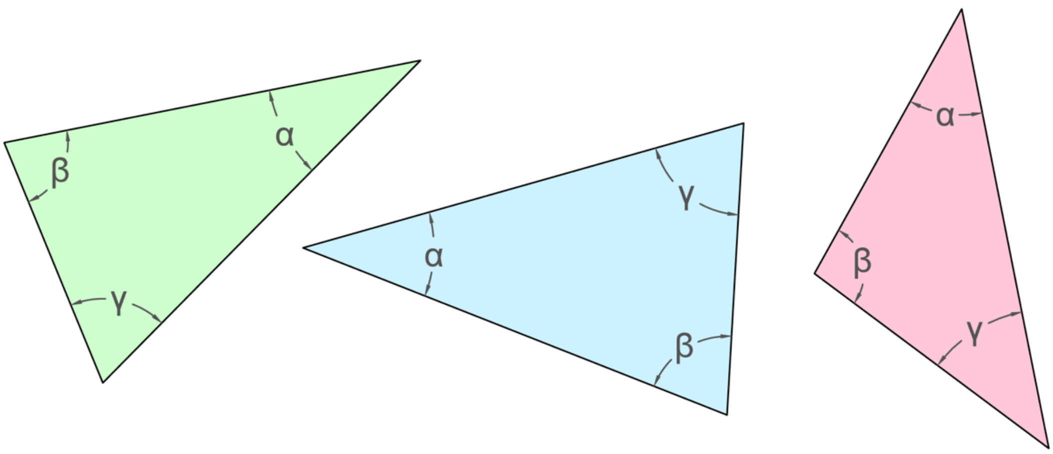
3. Repite la operación con estos tres segmentos.
    a. ¿Has conseguido dibujar el triángulo? ¿Por qué?
    b. ¿En este caso, qué tendría que ocurrir para que pudiésemos dibujarlo?
    c. Sitúa ahora los segmentos "a" y "c" sobre el segmento "b". Observa el fragmento de segmento "b" que queda al restarle "c". Esta es la diferencia de los segmentos "b" y "c". ¿Qué podemos decir de esta diferencia respecto al segmento "a"?

La presentación exacta de la actividad que se entregó a los alumnos aparece en el Anexo VI. Tarea de Investigación I. Construimos triángulos. Una vez han finalizado y entregado el ejercicio, ponemos todas las respuestas en común, y aquellos escolares que no han conseguido llegar a una respuesta argumentada o no la han encontrado, pueden al menos servirse de los razonamientos de sus compañeros para comprender la relación métrica que estamos trabajando.

Investigación 2. Lunes, 11 de abril.

La última sesión de investigación se centra en que los alumnos descubran cómo se produce la relación goniométrica en cualquier triángulo, es decir por qué la suma de los ángulos interiores siempre es igual a 180º. Para esta tarea he preparado un material de tipo manipulativo semejante al de los puzles. Cada alumno contará con un juego de reglas, un triángulo de cartulina recortado y con los ángulos denotados (diferente para cada alumno) como los que podemos ver en la imagen inferior, una ficha con los ejercicios y un papel en blanco para realizarlos.





Antes de empezar, les enseño cómo utilizar el juego de reglas. Algunos de ellos ya las habían utilizado en dibujo, mientras que otros no saben distinguir la escuadra del cartabón. Medimos juntos los ángulos de la escuadra con el transportador de ángulos, y la identificamos como la regla que tiene un ángulo recto y dos de 45º. Del mismo modo, medimos el cartabón y vemos que tiene igualmente un ángulo recto, pero que los otros dos son de 30º y 60º. Ahora las colocamos sobre el papel, y les enseño los movimientos básicos para dibujar paralelas y perpendiculares. Para hacerlo con técnica y destreza habría que practicar mucho. Sin embargo, para esta primera aproximación, la mayoría de los alumnos controla lo bastante bien las reglas como para saber hacer lo que demanda el ejercicio.

Una vez han practicado, reparto la ficha y comienzan la tarea. En este caso contamos para el estudio con 8 alumnos. Es la sesión con menor participación. Para realizar la tarea cuentan de nuevo con 45 minutos, ya que las preguntas se encuentran impresas. En este caso, la tarea se compone de 5 actividades:

1. Construimos una figura:
    a. Dibuja dos rectas paralelas horizontales de color azul.
    b. Ahora traza otras dos líneas paralelas entre sí de color rojo, y que corten a las rectas del primer apartado.
    c. Las cuatro rectas deben formar un área cerrada con forma de romboide.
    d. Traza una de sus dos diagonales de color verde, y prolóngala.

2. Identificamos ángulos:
    a. Numera los ángulos que encuentres en el dibujo de manera ordenada.
    b. Identifica ángulos opuestos por el vértice y señala los que son iguales, tanto en el dibujo como en una anotación al lado.
    c. Identifica un trío de ángulos suplementarios y márcalos en el dibujo, coloreándolos. Anota también al lado el número de los ángulos que has coloreado, e indica que son suplementarios y por qué.

3. Encuentra un triángulo en el dibujo y remárcalo. ¿Podríamos decir que sus tres ángulos son suplementarios? ¿Por qué?

4. Ahora trabajaremos con el triángulo de cartulina:
    a. Pégalo en el papel, con cuidado de no fijarlo demasiado porque después lo vamos a despegar.
    b. Traza una línea roja sobre uno de sus lados, y prolóngala. Ahora traza una paralela a la anterior y que pase por el vértice opuesto.
    c. Elige otro lado, y repite la operación. Traza primero una línea sobre el lado y prolóngala, y después, busca el vértice opuesto y dibuja su paralela.
    d. Como puedes ver, hemos construido de nuevo un romboide. La diagonal de este romboide es el lado del triángulo que no hemos utilizado. Prolonga esta línea.

e. Por último, fijándote en cómo están nombrados los ángulos del triángulo, y observando los vértices que hemos dibujado, nombra el resto de ángulos.

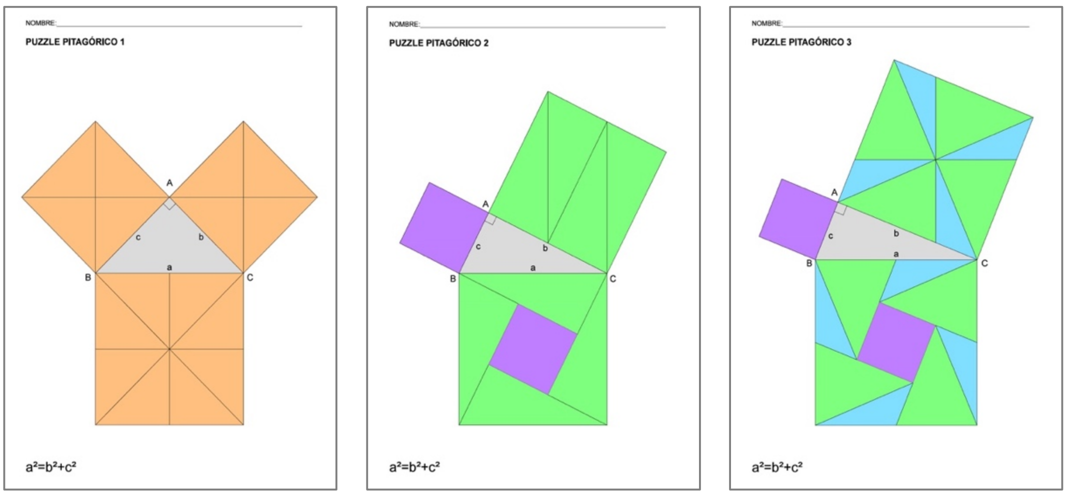
5. Despega el triángulo. Observa los ángulos que has nombrado e identifica donde se encuentran situados consecutivamente los tres del triángulo. Ahora recorta los vértices y pégalos.
    a. Según la clasificación vista, ¿cómo son estos tres ángulos?
    b. Cuánto suman dichos ángulos?

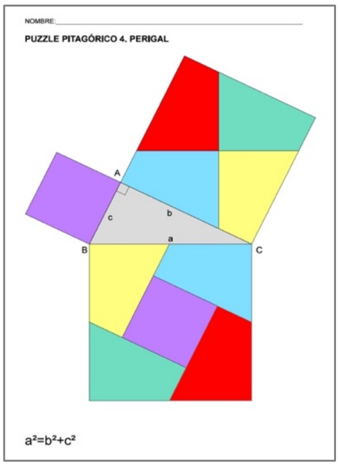
La presentación exacta de la actividad que se entregó a los alumnos aparece en el Anexo VII. Tarea de Investigación II. Construimos triángulos.

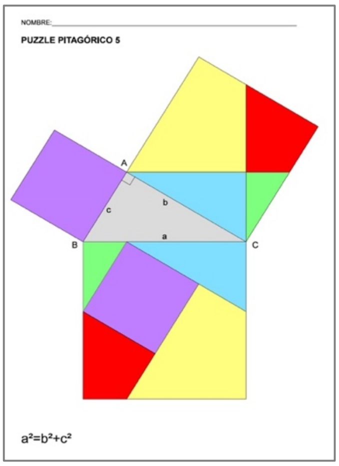
Investigación 3. Viernes, 1 de abril.

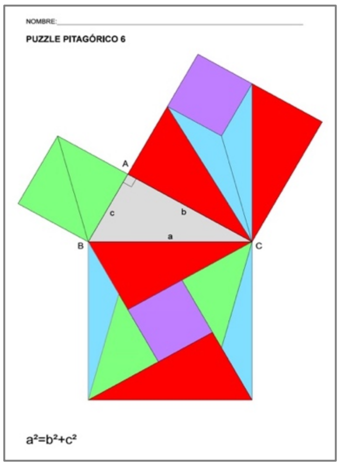
El día anterior en clase hicimos un breve recordatorio del Teorema de Pitágoras y de sus aplicaciones más básicas. Esta sesión de investigación la dedicaremos al análisis de la demostración geométrica del teorema a partir de puzles pitagóricos. El objetivo es que los alumnos descubran un significado geométrico del teorema, de manera que cuando escriban a^2, cuando lo enuncien o lo apliquen, sean conscientes de que ese cuadrado expresa, en realidad, la superficie de un cuadrado geométrico y no sólo es una potencia, y de que existe por lo tanto, una relación geométrica entre la superficie de los cuadrados que se construyen usando la longitud de los lados del triángulo.

Para ello, he preparado una serie de 6 puzles diferentes, con los que pretendo que los alumnos comprueben el teorema (es decir que la superficie del cuadrado que se construye con la medida del lado llamado hipotenusa es igual a la suma de los dos cuadrados que se construyen con las medidas de los catetos). En la siguiente imagen podemos ver la miniatura de dichos puzzles resueltos. Las fichas que se repartieron a los alumnos se encuentran en el Anexo VIII. Tarea de Investigación I. Puzzles pitagóricos.









Así, explico brevemente en la pizarra cómo se realiza la construcción, y reparto puzzles entre los asistentes. Para esta actividad no contamos con la presencia de los 15. Han asistido un total de 9. A lo largo de la sesión, los alumnos y alumnas van resolviendo los puzzles que cada vez se van haciendo más complicados. No consiguen alcanzar la solución de los últimos que reparto; al terminar el tiempo, cada uno ha realizado una media de 4 puzzles.

Después, se les reparten las cuestiones que deberán responder:

-A través de los puzzles que has realizado ¿Cómo podrías explicar la relación entre el área de los cuadrados pequeños que se construyen con los catetos, y el cuadrado grande que se construye con la hipotenusa?
-Si supiésemos la superficie de los dos cuadrados pequeños, ¿cómo podríamos saber la del cuadrado grande?
-Y si conocemos la superficie de cada uno de los cuadrados, ¿podríamos averiguar cuánto miden los lados del triángulo?
-Enuncia (apoyándote en lo trabajado con los puzles) el Teorema de Pitágoras.
-¿Qué te ha resultado más complicado? ¿Sabrías decir por qué?

6. ANALISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

6.1. DISCUSIÓN SOBRE LA FIABILIDAD DE LOS RESULTADOS

La validez y fiabilidad del estudio vienen determinadas por el diseño del instrumento y el proceso de redacción y elección de las preguntas. La organización de los datos, su análisis e interpretación para llegar a los resultados que a continuación se detallan, tienen las limitaciones propias de cualquier estudio exploratorio de investigación. La muestra es opinática, y su aplicación se ha hecho en tres sesiones de clase, que completaban una Unidad Didáctica dedicada a la Geometría del triángulo durante 7 sesiones con un grupo de estudiantes en su aula habitual. No obstante, para el trabajo que aquí se presenta, contamos con datos suficientes para poder hacer una interpretación de ellos.

6.2. TIPO DE ANÁLISIS REALIZADO

El análisis que se ha realizado de las respuestas obtenidas es de tipo descriptivo. Este proceso de análisis es inductivo: las categorías, relaciones y modelos aparecen teniendo en cuenta los datos obtenidos a través del cuestionario.

El método de procesamiento y revisión de la información llevada a cabo en el estudio empírico es un análisis de contenido. De este modo, después de una primera lectura, lo que haremos será descomponer las respuestas en unidades más simples, a partir de las que podamos sintetizar los temas e identificar sistemáticamente categorías (Rico, 2013). Para ello, recogeremos las expresiones, representaciones, ideas y conceptos relevantes que se presentan en dichas respuestas, y surgirán los descriptores de manera natural y sistemática.

Estos descriptores identifican las unidades de información, reduciéndose en temas la diversidad de respuestas obtenidas. Esta coincidencia se produce porque los alumnos utilizan las mismas expresiones para responder a las preguntas que han sido propuestas. El primer paso es organizar los datos en temas. Una vez que se han identificado respuestas similares y se han agrupado, se establecerán categorías dentro de cada tema, y posteriormente se interpreta cada categoría mediante una componente de su significado. Por último, se sintetizan los datos y se muestran los resultados categorizados.

6.3. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS. INVESTIGACIÓN 1

Puesto que la extensión del trabajo se encuentra limitada, se describirá exclusivamente el análisis de la Investigación I. Como se ha descrito en el apartado anterior, el método de análisis comienza con el desglose de las respuestas atendiendo a los organizadores descritos en el análisis de contenido. Para organizar las respuestas, en primer lugar se desglosarán todas precedidas de la sigla A (de alumno o alumna) y un número. De esta manera a lo largo del análisis podremos utilizar esta nomenclatura para referirnos a una respuesta concreta.

Análisis de significado de las respuestas a la actividad 1

1. *El segmento "a" es la base de un triángulo. Los segmentos "b" y "c" que aparecen dibujados bajo el enunciado son los otros dos lados del triángulo. Utiliza tu compás para transportar sus medidas sobre el segmento "a". Después, dibuja un arco de circunferencia con cada una de las medidas y construye el triángulo. Nombra sus lados y sus vértices.*

La primera actividad, como podemos ver, consiste en la realización de un dibujo. El contexto que se establece para todas las actividades que se desarrollan en esta sesión de investigación es la construcción de un triángulo dados sus tres lados. Esta primera es una actividad de reproducción, ya que servirá de apoyo en las dos siguientes actividades para poder comparar la relación que existe entre las longitudes de los tres segmentos que componen un triángulo, en este caso y en los siguientes.

El hecho más significativo que podemos encontrar en las respuestas está relacionado con la notación. Al final del enunciado, se les pide que nombren los lados y vértices del triángulo que han construido. De las 10 respuestas obtenidas (A1-A10), hay tres variedades:

- Aquellos que nombran los elementos y utilizan el convenio establecido correctamente (A, B, y C para los vértices opuestos a los lados a, b y c). (A2, A3, A4, A8, A9, A10)
- Aquellos que nombran los elementos, utilizan el convenio establecido de mayúsculas para los vértices y minúsculas para los lados, pero que no lo hacen de manera correcta en cuanto a sus posiciones: por ejemplo, el vértice opuesto al lado "a" no es el "A", sino el "B" o "C". (A6)
- Por último, aquellos que no emplean ningún tipo de notación, y dejan ese apartado sin resolver. (A1, A5, A7)

El concepto que se trabaja con esta actividad es el de triángulo, como figura geométrica que se compone de tres lados y tres vértices formando tres ángulos. De entre todas las respuestas obtenidas, podemos asegurar que aquellos que nombran correctamente los elementos del triángulo que ellos mismos han construido, con toda probabilidad conocen el concepto y son capaces de trabajar con él y con sus elementos. Sin embargo, de aquellas respuestas en las que los alumnos no han utilizado ninguna notación, no podemos afirmar que se comprenda el concepto ni sus componentes.

El sistema de representación empleado en esta respuestas es exclusivamente gráfico. A través de la construcción geométrica de un triángulo mediante el uso de reglas y compás se comprueba la destreza de los alumnos en el manejo de esas herramientas. En el caso de esta primera actividad, todas las respuestas son satisfactorias a nivel representativo. A pesar de ello, en uno de los casos (A10) podemos ver que el alumno trazó arcos de circunferencia en el dibujo que no llevaban a la solución correcta. Podemos suponer que que se produjo es un ensayo-error. La dificultad que le llevó a tener que hacer varias veces el ejercicio podría haber sido producida por no haber leído el enunciado, por una mala interpretación o comprensión de éste o por una interpretación incorrecta de los datos proporcionados. En todo caso, finalmente llegó a construirlo de manera adecuada.

Las siguientes respuestas se expresan en lenguaje gráfico y verbal. En primer lugar, los alumnos tienen que repetir el proceso llevado a cabo en esta primera actividad y después contestar a una serie de preguntas. Este proceso es sencillo para el nivel en que nos encontramos, y todos los alumnos lo han realizado correctamente; pasamos a analizar las respuestas a las preguntas.

Análisis de significado de las respuestas a la actividad 2

2. *Repite la operación con estos tres segmentos. No olvides dibujar primero los segmentos "b" y "c" sobre cada extremo del segmento "a".*

    a. *¿Has conseguido dibujar el triángulo? ¿Por qué?*

- A1. No, porque los dos círculos no se tocan.
-A2. No. Los arcos no se cortan y no tengo vértice.
-A3. No porque no me sale un punto.
-A4. No porque la longitud de los segmentos "b" y "c" es demasiado corta.
-A5. No. Los arcos no se juntan.
-A6. No porque los arcos no llegan a juntarse.
-A7. No, porque los círculos son muy pequeños.
-A8. No, porque la longitud de los segmentos no lo permite.
-A9. No. Los arcos no interseccionan ya que "a" es demasiado largo.
-A10. No

En este primer apartado de la actividad, los alumnos no pueden dibujar el triángulo cuando intentan repetir el método que han usado en la primera actividad. Entonces se les pregunta ¿Por qué no has podido dibujar el triángulo? El objetivo de estas preguntas es indagar sobre los razonamientos que llevan a cabo acerca del motivo o los motivos que hacen que no hayan podido construir el triángulo.

Los términos más empleados en sus respuestas son:

- Círculo, circunferencia, arco. (A1, A5, A6, A7, A9) Se agrupan las respuestas con estos términos ya que todas ellas están relacionadas con el dibujo del compás. Hacen referencia al grafo dibujado y encuentran en los arcos de circunferencia la razón más directa que impide la construcción del triángulo. Los verbos que acompañan a estos términos son "no se tocan", "no se juntan", "no llegan a juntarse", que hacen referencia a la intersección; "son muy pequeños", que ofrece un razonamiento basado en el tamaño y por último "a" es demasiado largo", donde podemos encontrar una relación entre la intersección y la longitud de uno de los segmentos (hay otras respuestas que encuentran esta relación -con otros términos- con otros o todos los segmentos del ejercicio y no sólo con el segmento "a").

- Vértice, punto. (A2, A3) En este caso hemos agrupado las respuestas de este tipo puesto que ambos términos hacen referencia al lugar geométrico en el que los arcos de circunferencia intersecan. El uso de estos términos va acompañado en todos los casos de expresiones como o "no se cortan" o "no me sale (un punto)". Debido al uso de estas palabras, podemos decir que todos los razonamientos son procesados haciendo uso del concepto de intersección.
- Longitud, segmento. (A4, A8) Son dos términos que vemos siempre juntos. Mediante el uso de estos términos encontramos que el concepto de longitud, siempre que se expresa, es para referirse a un segmento. Estos segmentos formarán parte en su caso de un triángulo, por tanto segmento y lado del triángulo, cuando pueda construirse, harán referencia al mismo elemento.

De entre todas las respuestas, cabe destacar las de los alumnos A4, A8 y A9, puesto que son las que ofrecen mayores conexiones entre hechos y conceptos. Estos tres alumnos establecen un razonamiento construido a partir de la relación entre el punto que genera la intersección de los arcos de circunferencia y la longitud de los segmentos. No sólo identifican la necesidad de que exista un vértice, determinado por la intersección entre los arcos de circunferencia, sino que expresan que la intersección se producirá o no en función de la longitud de los segmentos. Además, cada respuesta es diferente. El alumno A4 sólo percibe la necesidad de cambiar la longitud de los segmentos "b" y "c" para poder construir el triángulo, sin percatarse de la posibilidad de cambiar el segmento "a". El alumno A9 hace justo lo contrario, encontrando en "a" la solución al problema. Sin embargo el alumno A8 contesta, aunque de manera ambigua, que cambiando la longitud de cualquiera de los segmentos podría hallarse una solución. La imprecisión de la respuesta no permite asegurar que el argumento sea este. Veremos que analizando sus respuestas a las siguientes preguntas, parece que este alumno se refería, como se ha dicho, a cambiar la longitud de cualquiera de los segmentos.

En cuanto a conceptos, podemos distinguir tres razonamientos distintos a partir de los argumentos encontrados en las repuestas:

- Algunos alumnos no llegan a desarrollar ninguno de los conceptos necesarios para describir de manera correcta un razonamiento basado en el conocimiento del triángulo. En estos casos, hacen referencia a que los círculos (con lo que quieren expresar arcos de circunferencia) "no se tocan", "no se juntan" o "son muy pequeños". (A1, A5, A6, A7, A10). Estos alumnos fijan su atención en los condicionantes que impiden llevar a cabo la construcción desde el resultado gráfico obtenido al final, sin retroceder hasta la condición inicial, la longitud de los segmentos "b" y "c". Por tanto, podemos decir que limitan su respuesta a lo que observan en el dibujo que han hecho.

- El resto de alumnos sí desarrolla conceptos. Algunos se apoyan en el de intersección, y por lo tanto basan su razonamiento en la inexistencia de un "punto o vértice" con el que poder unir los dos extremos del segmento "a". (A2, A3, A9). Comprenden el triángulo como la unión de tres vértices, y sin el tercero la construcción no se puede llevar a cabo.
- Por último, otros alumnos describen sus razonamientos apoyándose en el concepto de longitud de un segmento, y de esta manera expresan ideas usando siempre unidos ambos términos. (A4, A8) Sin embargo, no podemos saber aún si son capaces de establecer relaciones entre el radio del arco de circunferencia que han dibujado, y los segmentos proporcionados que habrían de ser lados del triángulo (que no han podido construir).

A lo largo de este primer apartado de la segunda actividad, hemos visto cómo se produce un acercamiento de los alumnos a la construcción geométrica de un triángulo. Las respuestas, más o menos argumentadas a diferentes niveles de precisión, giran en su mayoría en torno a los arcos de circunferencia dibujados. Al apoyarse en conceptos para establecer respuestas, sólo tres de ellas encuentran relación entre las posibles soluciones del problema y la longitud de los segmentos dados, que es el dato inicial del que disponen.

De este modo, con la segunda pregunta, la intención es que un mayor número de estos alumnos profundicen en su primer razonamiento, y busquen qué condiciones de partida deberían cambiar para que sí se pueda construir un triángulo. Al volver sobre su propio razonamiento inicial, descubriremos cuántos de ellos comienzan a acercarse al concepto de longitud de un segmento.

b. ¿Qué tendría que ocurrir para que pudiésemos dibujarlo?

-A1. Que los círculos se toquen.
-A2. Que los círculos se uniesen en un vértice.
-A3. Que los segmentos "b" y "c" fuesen más largos, y entonces se cortarían en un punto.
-A4. Que el segmento "a" fuese más corto.
-A5. Que los arcos se junten.
-A6. Que los arcos de circunferencia se junten.
-A7. Que los dos círculos sean más grandes.
-A8. Debería ocurrir:
-Que el segmento "a" fuese más corto.
-Que el segmento "b" fuese más largo, hasta que su arco corte al de "c".
-Al revés, que aumente "c" hasta cortar a "b"
-Que aumenten ambos, "b" y "c", hasta cortarse.
-A9. Los arcos deben interseccionar. Debemos reducir el tamaño del segmento "a", o ampliar el tamaño de uno o ambos segmentos, "b" y "c".
-A10. Que los arcos de círculo se uniesen en un vértice.

Las respuestas en este caso emplean los mismos argumentos que las anteriores, y los alumnos emplean de nuevo los términos con los que ya habían expresado sus ideas. Si nos volvemos a fijar en los elementos en los que basan sus argumentos, hay todavía un número elevado de alumnos cuya respuesta no ofrece claves en cuanto al uso de conceptos. (A1, A5, A6, A7) No han avanzado en su razonamiento, y simplemente han reordenado las palabras de manera que contestan a una pregunta diferente sin plantearse un nuevo problema. En este caso no se ha conseguido (a través de una nueva pregunta) un razonamiento diferente, y esto nos hace plantearnos si la redacción de dicha pregunta ha sido la adecuada. La intención era que a través del mismo problema los alumnos comprendiesen la importancia de la longitud de los segmentos utilizados para la construcción del triángulo. Sin embargo, estos alumnos no sólo no establecen relaciones ni expresan estructuras, sino que además no basan sus argumentos en los conceptos adecuados.

Por otro lado, aquellos alumnos que habían comenzado apoyándose en la intersección de los arcos de circunferencia como base de su razonamiento, lo siguen haciendo (A2, A3, A9 A10). En este caso, ha aumentado en una las respuestas de este tipo, ya que el alumno A10 no había ofrecido respuesta en el caso anterior.

Los alumnos A3, A4, A8 y A9, son los que proporcionan, expresándolo de manera diferente, todas las posibilidades que podrían darse para poder dibujar un triángulo.

El alumno A3 ha avanzado desde la búsqueda de un tercer vértice a la deducción de que la causa de ausencia de ese vértice es la longitud de los segmentos. Sin embargo, no abandona del todo esta premisa, ni observa que el segmento “a” podría reducir su longitud y la consecuencia sería también la buscada. Al igual que él, el Alumno 4 se queda en uno de los argumentos, sin referirse a la posibilidad de que los segmentos “b” y “c” aumenten sus longitud, ambos o uno de ellos, hasta intersecar. A priori, parece más directo observar esta posibilidad en lugar de imaginar que la longitud del segmento “a” podría disminuir para construir el triángulo.

Finalmente, podemos ver cómo los alumnos A8 y A9, ofrecen expresándolo de manera diferente, todas las posibilidades que podrían darse para poder dibujar un triángulo. Del alumno A8 ya lo habíamos intuido en su anterior respuesta, y ahora lo confirma. Estos dos argumentos son, sin duda, los más avanzados, con mayor nivel de precisión y se expresan con un lenguaje verbal correcto. Estos argumentos identifican estructuras a partir de los conceptos que emplean. Son razonamientos deductivos que encuentran una relación métrica entre la longitud de los lados del triángulo. Asimismo, podemos decir que estos alumnos identifican las condiciones necesarias para poder construir la figura que se les demanda, y son capaces de inferir proposiciones aplicables a un problema concreto.

Para terminar con la actividad 2, veremos las respuestas a la última pregunta. Está dirigida para orientar a los alumnos a descubrir de manera autónoma la propiedad sumativa de los lados de un triángulo, que se ha de cumplir para poder construirlo.

c. *Fijándonos en los segmentos "b" y "c" colocados sobre el segmento "a", ¿qué podemos decir de la longitud de la suma de los segmentos "b" y "c" respecto de la longitud del segmento "a"?*

-A1. Que a es más grande.
-A2. Que b y c son más cortos que a.
-A3. Que esta suma es más corta que "a".
-A4. Podemos decir que la suma es menor que la longitud de "a".
-A5. Que la suma no llega a ser tan larga como "a".
-A6. Que "a" es más largo.
-A7. Que el segmento "a" es mayor que los otros dos sumados, "b" y "c".
-A8. Que la suma de la longitud de los segmentos "b" y "c" es menor que la longitud del segmento "a".
-A9. Podemos decir que la suma de "b" y "c" es inferior al segmento "a".
-A10. Que su suma es más pequeña que la longitud de a.

La categorización que se ha hecho responde a criterios de orden. Todos los alumnos han contestado de manera correcta a lo que se les está preguntando. Sin embargo, unos han empleado expresiones que hacen referencia al signo "mayor que" y otros a "menor que", aunque las expresiones no sean exactas.

En primer lugar, veamos las expresiones de desigualdad "mayor que". Los alumnos que han expresado respuestas de este tipo han sido menos numerosos (A1, A6, A7). Como podemos ver, sólo una de las tres respuestas contiene la expresión literal. Las otras dos, utilizan el adverbio de cantidad "más", con el que expresan que el segmento "a" es "más grande" o "más largo", es decir mayor. El enunciado de la propiedad, tal y como la interpretan estos alumnos, sería que "todo lado de un triángulo es mayor que la suma de los otros dos".

En los otros siete casos, los alumnos expresan una desigualdad del tipo "menor que". Puesto que las respuestas son más numerosas, las expresiones utilizadas son más amplias. Abunda el adverbio de cantidad "más", en este caso acompañando a los adjetivos "corta" y "pequeña". También aparecen otros como "inferior" o "no llega a ser tan larga" que denotan la intención de los alumnos de decir que es "menor que". La expresión literal sólo se utiliza dos veces. En definitiva, en este caso la propiedad quedaría enunciada como "la suma de dos de los lados de un triángulo debe ser menor que el tercero".

Análisis de significado de las respuestas a la actividad 3

Si vemos las respuestas a esta actividad, los argumentos y términos empleados guardan una estrecha relación con los de la actividad anterior. Podemos decir que esto sucede porque las preguntas están enunciadas de la misma manera. De este modo, para no extender excesivamente el análisis y que no se haga repetitivo, analizaremos exclusivamente aquellos argumentos que generen una nueva categoría, ya que serán los que más nos interesen.

3. *Repite la operación con estos tres segmentos.*

    a. *¿Has conseguido dibujar el triángulo? ¿Por qué?*

-A1. Porque los círculos otra vez no se tocan.
-A2. No, porque los arcos son demasiado grandes y no se cortan.
-A3. No porque no me sale un punto.
-A4. No, porque el segmento b es demasiado largo.
-A5. No, otra vez los arcos no llegan a juntarse.
-A6. No porque los arcos son tan grandes que no se juntan.
-A7. No porque los círculos son muy grandes.
-A8. No, porque de nuevo la longitud de los segmentos no permite que haya intersección.
-A9. No porque los arcos no interseccionan.
-A10. No, porque no obtengo un vértice entre los segmentos.

Como podemos ver en las respuestas a la primera pregunta, los términos empleados son los mismos. Los alumnos repiten sus respuestas, y en algunos de los casos, si es específica, la invierten. Un ejemplo de este caso es el alumno A7, que utilizando una estructura gramatical idéntica, cambia el adjetivo “pequeños” por su antónimo “grande”.

Además, aquellos que hacen referencia a un concepto, utilizan los mismos, longitud (A4, A8) y/o intersección (A2, A3, A9, A10). En los casos en los que los alumnos utilizan este último concepto, podemos apreciar una ligera diferencia. En la actividad anterior, el punto de corte de los arcos de circunferencia se traducía (en la representación gráfica) en un vértice de manera visual más directa. Mientras, en este ejercicio tan sólo dos alumnos han hecho referencia al vértice, y además uno de ellos través de su definición como punto y no a través del uso del propio término. Si nos centramos en las respuestas referidas a la longitud (A4, A8), de nuevo uno de ellos ha respondido de una forma más amplia y correcta, aunque ambigua (del mismo modo que en la actividad anterior), al hablar de la longitud de todos los segmentos, sin restringirse a uno de ellos. Podemos decir que argumenta considerando las relaciones entre los tres lados. El otro alumno, en cambio, ha identificado uno de los segmentos como el único cuya longitud hace que el triángulo no se pueda construir. Seguramente, al igual que en el ejercicio anterior, no ve todas las relaciones.

El resto de alumnos (A1, A5, A6, A7) basa su interpretación en la geometría que ha dibujado mediante círculos y figuras, aunque no estén completas. Quizás sea el dibujo que han realizado la causa de que sus razonamientos se inclinen a encontrar relaciones de tamaño, de manera que hagan de ello el argumento sobre el que se basan para afirmar que es imposible dibujar el triángulo en esas condiciones. Esta interpretación inicia una justificación correcta pero incompleta, porque no llevan más allá su razonamiento, no indagan sobre la causa origen.

b. ¿En este caso, qué tendría que ocurrir para que pudiésemos dibujarlo?

-A1. Que los círculos se toquen.
-A2. Que el círculo grande sea más pequeño y así se corten.
-A3. Que los círculos sean distintos y salga un punto.
-A4. Que el segmento "b" sea más corto.
-A5. Que los arcos se junten.
-A6. Que el arco de "c" sea más grande o que el arco de "b" sea más pequeño, y entonces se junten.
-A7. Que el círculo más grande sea más pequeño.
-A8. Que la longitud del segmento "b" sea más corta o que la de los segmentos "a" y "c" sea más larga, hasta que exista una intersección.
-A9. Reducir el tamaño de "b" o ampliar el tamaño de "c" o "a".
-A10. Cambiar la base del triángulo y que sea "b" en vez de "a".

Como vemos, y es de esperar, aquellos alumnos que responden que el triángulo no se puede construir porque no se produce intersección, después responden de manera directa y automática que lo que tendría que ocurrir es que se produjese (A2, A3). Lo expresan utilizando una construcción gramatical parecida, pero con un matiz importante. Cuando el alumno A3 utiliza "distintos" para referirse a los arcos de circunferencia, lo que está expresando es que habrían de cambiar su longitud hasta intersecar y generar un vértice. Sin embargo, no lo expresa de manera adecuada, y su argumentación es limitada, lo que no nos permitiría incluirlo en la siguiente categoría de razonamientos.

Si analizamos los argumentos relativos al concepto de longitud (teniendo en cuenta que sea la longitud de los tres segmentos lo que hace que se cumpla la relación métrica necesaria para poder dibujar un triángulo) vemos que esta vez son más numerosos (A4, A6, A8, A9). Estos argumentos son los que más se acercan a la propiedad que intentamos que los alumnos aprendan de manera guiada (casi autónoma). Los alumnos responden del mismo modo que en la actividad 2, y cada respuesta responde a una estrategia diferente. Los alumnos A4 y A6 no son capaces de expresar todas las posibles relaciones que construyen un triángulo, y mientras uno focaliza su atención en los dos segmentos utilizados para dibujar las circunferencias, el otro lo hace en el segmento sobre el que se apoyan. Por otro lado, los alumnos A8 y A9 sí describen todas las situaciones posibles, expresan sus razonamientos con un nivel de concreción mayor y sus deducciones realizadas a partir tanto de sus propios dibujos geométricos como de conocimientos previos son mucho más precisas y completas.

Por último, un alumno contestó erróneamente a la pregunta, el A10. Se percató del error al realizar el siguiente apartado de la actividad, cuando tuvo que dibujar los segmentos "a" y "c" sobre "b". Durante la realización del ejercicio se acerco y me preguntó, afirmando que esto no podía ser así entonces, y que no podría dibujarse aunque cambiásemos la base.

Descubrió que el problema no se encontraba en uno de los segmentos. Sin embargo, al no encontrar la solución en relación métrica de longitud entre los tres segmentos, no cambió su respuesta.

c. *Sitúa ahora los segmentos "a" y "c" sobre el segmento "b". Observa el fragmento de segmento "b" que queda al restarle "c". Esta es la diferencia de los segmentos "b" y "c". ¿Qué podemos decir de esta diferencia respecto al segmento "a"?*

-A1. Que la diferencia es más grande que a.
-A2. La diferencia de "b" y "c" es mayor que "a".
-A3. Que el segmento "a" es más corto que el segmento que queda de "b".
-A4. Podemos decir que la diferencia es mayor que el segmento "a".
-A5. Que la diferencia es más larga que "a".
-A6. Que "a" es más corto.
-A7. La diferencia de "b" y "c" mide más que "a".
-A8. Que la diferencia de los segmentos "b" y "c" es mayor que el segmento "a".
-A9. Que esta diferencia es mayor que el segmento "a".
-A10. La diferencia de los segmentos "b" y "c" sigue siendo mayor que el segmento "a", debido a ello no hay punto de corte entre sus arcos de círculos.

Por último, organizamos las respuestas a esta pregunta según su signo. A pesar de la variedad, expresadas de uno u otro modo, todas son correctas en términos de propiedad métrica, ya que justifican que no se pueda construir el triángulo debido a una relación entre la longitud de sus lados.

En este caso, hay muchas menos respuestas de desigualdad del tipo "menor que". Esto puede ser causado por cómo está expresada la pregunta. Los alumnos utilizan términos que no hemos visto anteriormente, como "corto". Uno de ellos describe como "el segmento que queda de b" a la diferencia entre los segmentos "b" y "c". De manera que "el resto" es sinónimo de "lo que queda".

Por otro lado, las respuestas que se refieren a la desigualdad "mayor que", son mucho más completas en términos de conceptos y estructuras que se desarrollan en ellas. Además, la mayoría de los alumnos emplea el término exacto "mayor que". Algunos alumnos, como el A10, expresan haber hallado la relación entre la pregunta que se les está haciendo y la construcción del triángulo, en lo que nos centrábamos en actividades anteriores.

7. CONCLUSIONES

En este apartado, relacionado con el estudio empírico realizado, la intención es la de ensamblar los elementos que han sido analizados de manera separada en el apartado anterior, y de esta manera construir una interpretación general.

Recordemos que el objetivo de este estudio es el de "promover la reflexión escrita de un grupo de alumnos de 3º E.S.O. de Matemáticas acerca de algunas de las propiedades métricas de un triángulo para observar, analizar, interpretar y describir los argumentos que esos alumnos expresan y formulan sobre tales conceptos y relaciones". A pesar de que la muestra era pequeña, podemos realizar una aproximación al objeto de estudio. Subrayamos que las conclusiones expresadas sólo son válidas para los sujetos que participaron en el estudio. Por tanto, no se pretende generalizar los razonamientos aquí analizados ni los juicios emitidos sobre ellos.

En primer lugar, podría decirse que las categorías obtenidas para la reducción de datos proceden del estudio empírico, y que cada una de ellas soporta un significado para los conceptos, términos, argumentos y razonamientos que proporcionan el abanico de respuestas ofrecido por los alumnos para la primera de las tres tareas de investigación (la única que se pone de manifiesto en el presente trabajo).

En sus respuestas a la primera actividad de esta sesión, los alumnos muestran su destreza con el manejo de los instrumentos de dibujo, ponen de manifiesto que conocen teórica y técnicamente los elementos por los que está formado un triángulo (a pesar de que en tres de los casos no nombran dichos elementos) y en su mayoría son capaces de utilizar una notación adecuada. En los dos primeros apartados, segunda y tercera actividad, un tercio de las respuestas no se basa en conceptos de longitud ni intersección, y expresan sus razonamientos mediante términos incorrectos. Casi todos asocian el sistema de representación gráfico con el verbal, y muchos basan sus respuestas en el dibujo que realizan. Algunos, aunque pocos, establecen relaciones entre la longitud de los segmentos dados, el arco de las circunferencias, y la intersección de estas como proceso de construcción del triángulo. De manera análoga, aproximadamente la mitad de estos últimos son capaces de realizar el proceso inverso, y de argumentar que el hecho de que no se produzca intersección deriva de la longitud de los segmentos. Por último, en el tercer apartado de las actividades segunda y tercera, mediante el uso de los términos de desigualdad "mayor que" y "menor que", o análogos, los alumnos demuestran comprender que existe una relación entre la longitud de los tres segmentos dados que hace que no sea posible construir un triángulo con ellos.

Para terminar, cabe plantearse algunos aspectos que podrían haberse mejorado. Si en lugar de ser un cuestionario escrito éste hubiese sido oral, las posibilidades de orientar a los alumnos se hubiesen incrementado y mejorado. Por ejemplo, al formular la pregunta "¿Has conseguido dibujar el triángulo?¿Por qué?" y recibir del alumno A7 la respuesta "No, porque los círculos son muy grandes", en lugar de continuar con el resto de preguntas, como ha ocurrido con el cuestionario, podríamos detenernos e intentar que profundizase sobre su propio razonamiento. En algunos casos, y a la vista de las respuestas obtenidas, podríamos reorientar la reflexión del alumno, adaptando la encuesta a la diversidad de respuestas del alumnado.

Como podemos ver en los resultados, hay un número elevado de alumnos, casi la mitad, cuyos razonamientos podrían haberse construido de un modo más sólido de haber implantado la actividad con retroalimentación. Si bien es cierto que en este estudio queremos evaluar como se expresan respecto a un tema concreto. Sin embargo, en un proceso de aprendizaje, sería muy útil que una vez desarrolladas las respuestas, hubiese una puesta en común y un debate entre ellos, con el profesor como moderador.

Otra posibilidad sería, por ejemplo, observar a los alumnos responder el cuestionario e intervenir en los casos en los que las respuestas se alejen de los conceptos o procedimientos que nos interesan. Si bien es cierto que en un aula con un grupo numeroso es imposible plantear preguntas de manera individual a cada uno de los alumnos, pero en este caso particular podría haberse realizado este método mixto, híbrido entre el cuestionario y la entrevista.

En definitiva, este estudio no sólo sirve para ofrecer un análisis de los argumentos de los alumnos acerca de un tema concreto. También sirve para reflexionar sobre la figura del profesor como guía en el proceso autónomo de aprendizaje. Por un lado, hacer que los alumnos trabajen solos o en grupo a través de actividades que elaboradas por el profesor para guiar el proceso de adquisición de nuevos conceptos es un reto, tanto para los alumnos (que han de desarrollar nuevas estrategias de trabajo), como para los profesores (que debemos esforzarnos por diseñar una guía para que sea útil este proceso). Por otro lado, el diseño de estas actividades no es lo único fundamental, sino también cómo son implantadas y desarrolladas en el aula.

8. BIBLIOGRAFÍA

- Barreto, J. (2008). Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Revista Números*, nº 69. Ideas y recursos para el aula.
  Recuperado en http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_03.pdf
- Barreto, J.C. (2013). Deducción general del Teorema de Pitágoras en trigonometría: de la didáctica de la geometría hasta la didáctica del análisis matemático. *Revista Premisa,* nº15, (pp. 21-35).
- Barrantes, M.; Balletbo, I.; Fernández, M. (2014). Enseñar Geometría en Secundaria. *Actas Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación.*
- Bressan, A.; Bogisic, B. y Crego, K. (2000). Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica. Mirar, construir, decir y pensar… *Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.*
- Bishop, A. (1983). Space and Geometry. En R. Lesh and M. Landau (Eds.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Process* (pp. 75-203). New York: Academic Press.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Morelos, México.
- Flores, P. (2002) Laberintos con alambre (estructuras topológico-métricas). *Revista Suma*, nº 41 (pp. 19-28).
- Flores, P.; Lupiáñez, J. L.; Berenguer, L; Marín, A. y Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas***.** Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Frege, G (1996). Consideraciones sobre sentido y referencia. En Mosterín J. (Ed.) *Escritos filosóficos*. Barcenona, España: Crítica.
- Luelmo, M. J. (1997). Construcciones geométricas: Una experiencia interdisciplinar de autoformación. *Revista Epsilon,* nº 38, (pp. 131-154).
- Ministerio de Educación (2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el. Currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.*
- Pérez, A. (2000). Cabri e Internet. *Revista Suma,* nº 36, (pp. 113-115).
- Rico, L.; Marín, A; Lupiáñez, J.L.; y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los Números Naturales. *Revista Suma,* nº 58, (pp. 7-23).
- Rico, L. (2012). Aproximación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, nº 1, (pp. 39 – 63).
- Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista iberoamericana de educación matemática. Unión*, nº 33, (pp. 11–27).
- Rico, L. (2016). Sistemas de significados de un concepto en las Matemáticas Escolares. Documento no publicado (Apuntes de clase). Granada, España: Universidad de Granada.
- Torregrosa, G; Quesada, H (2007). Coordinación de los Procesos Cognitivos en Geometría**.** *Revista Relime*, nº 10, (pp. 273-300).
- Vargas, G.; Gamboa, R (2013)**.** La enseñanza del Teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso de Geogebra, según modelo Van Hiele. *Revista Uniciencia,* vol. 27, nº1, (pp. 95-118).

Anexos

Anexo I
Libro de texto

Proyecto Los Caminos del Saber
Editorial Grazalema Santillana

Matemáticas 3 ESO

VOLUMEN 2

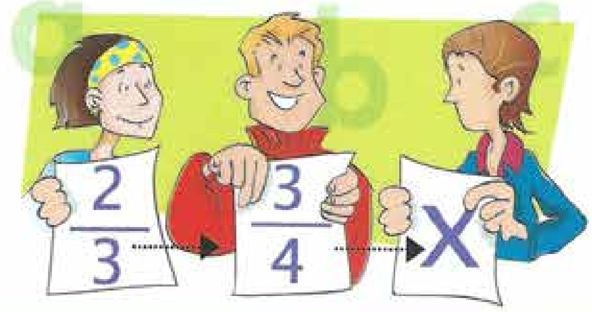
ANDALUCÍA

Proyecto Los Caminos del Saber

Grazalema
Santillana

Índice

VOLUMEN 1



VOLUMEN 2

VOLUMEN 3

8 Lugares geométricos. Figuras planas

La riqueza de los sabios

Aquella fue la gota que colmó el vaso: su propia madre le reprochaba que siendo tan sabio no fuera igualmente rico. La chanza no era nueva pero a Tales de Mileto le dolió como nunca. Se encerró en casa y comenzó a fraguar su plan.

Sus estudios de los astros le permitieron predecir un perfecto año para el cultivo. Así que reuniendo todo el dinero del que disponía y aun el que, en secreto, pudo pedir prestado, se hizo con el control de todas las prensas de aceite de Mileto y su vecina Quíos.

Su predicción sobre el clima fue acertada, y sus vecinos se frotaban las manos pensando en los beneficios de la cosecha de aceituna. Pero cuando fueron a moler las aceitunas sus sonrisas se tornaron en muecas, pues hubieron de pagar lo estipulado por Tales.

Cumplida su pequeña venganza, y además convertido en rico, vendió las prensas y las tierras y se dedicó a sus estudios de filosofía y matemáticas, no sin antes decirle a sus vecinos: «Tomad para vosotros los consejos que dais a otros».

Uno de los postulados de Tales es que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es siempre un ángulo recto.

DESCUBRE LA HISTORIA...

1. Busca información sobre Tales de Mileto.
2. A Tales de Mileto se le atribuye la medición de la Gran Pirámide. Explica cómo lo hizo.
3. Además del postulado que se enuncia en el texto, investiga qué otras aportaciones geométricas realizó Tales de Mileto.

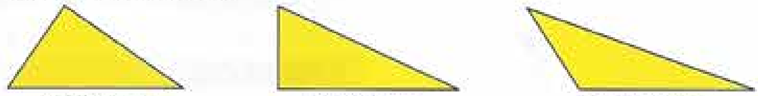
Antes de empezar la unidad...

CONVIENE QUE...
Recuerdes la **clasificación de triángulos** según sus ángulos y según sus lados.

PORQUE...
Nos ayudará a comprender las **propiedades métricas de los triángulos.**

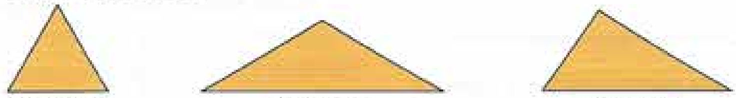
Clasificación de triángulos

- Según sus ángulos:



Acutángulo Rectángulo Obtusángulo

- Según sus lados:

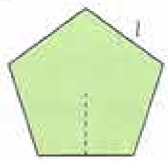


Equilátero Isósceles Escaleno

CONVIENE QUE...
Repases lo que es un **polígono regular**.

PORQUE...
Lo necesitaremos para comprender cómo se calcula el **área de un polígono regular**.

Polígono regular



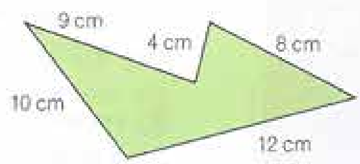
Un **polígono regular** es el que tiene todos sus lados y todos sus ángulos iguales.
En caso contrario, el polígono es **irregular**.

La **apotema** es un segmento perpendicular a un lado, trazado desde el centro del polígono regular al punto medio del lado.

CONVIENE QUE...
Sepas calcular el **perímetro de un polígono.**

PORQUE...
Nos será útil para calcular el **área de algunos polígonos.**

Perímetro de un polígono



Perímetro = 8 + 12 + 10 + 9 + 4 = 43 cm

EVALUACIÓN INICIAL

Clasificación de triángulos

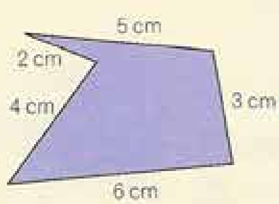
1. ¿Existe algún triángulo con dos ángulos obtusos? ¿Y un triángulo rectángulo con un ángulo obtuso? ¿Y un triángulo isósceles y obtusángulo?

Polígono regular

2. Di cuál de estos polígonos es regular.
a) Un triángulo equilátero. b) Un rectángulo. c) Un rombo.

Perímetro de un polígono

3. Halla el perímetro de este polígono.



PLAN DE TRABAJO

En esta unidad aprenderás a...

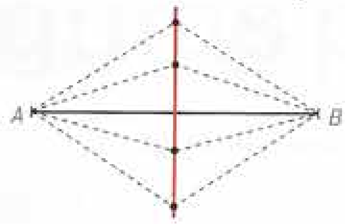
- Manejar el concepto de lugar geométrico.
- Determinar las rectas y puntos notables de un triángulo.
- Calcular el área de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares.
- Reconocer y calcular el área del círculo y de las figuras circulares.

1 Lugares geométricos

Se llama **lugar geométrico** al conjunto de todos los puntos que cumplen una determinada propiedad geométrica.

EJEMPLOS

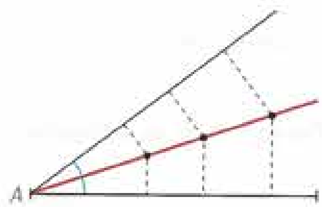
1 **Determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a los extremos de un segmento es la misma.**



Los puntos que cumplen esta condición forman una recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.

Es decir, el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento es su **mediatriz**.

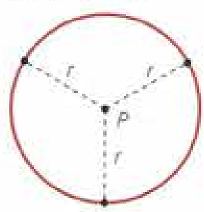
2 **Calcula el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a los lados de un ángulo es la misma.**



Los puntos que cumplen esta condición forman una recta que divide al ángulo en dos partes iguales.

Es decir, el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados de un ángulo es su **bisectriz**.

3 **Halla el lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia a un punto P es r.**



Los puntos que cumplen esta condición forman una circunferencia con centro en el punto P, y radio, la distancia r.

EJERCICIOS

PRACTICA

1 Dibuja en tu cuaderno el lugar geométrico de los puntos que cumplen estas condiciones.

a) Equidistan de los extremos de un segmento de 6 cm de longitud.

b) Equidistan de los lados de un ángulo de 90°.

c) Están a 2 cm del punto P.

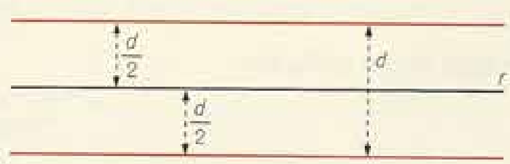
APLICA

2 Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta.

REFLEXIONA

3 Define las rectas rojas como lugar geométrico.

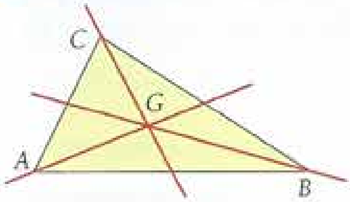
a)



b)

2 Rectas y puntos notables en un triángulo

2.1 Medianas

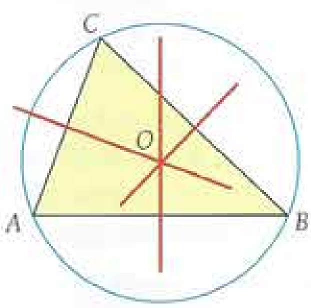


Las **medianas de un triángulo** son las rectas que se obtienen al unir cada uno de los vértices del triángulo con el punto medio del lado opuesto.

Las tres medianas del triángulo se cortan en un punto llamado **baricentro**. El baricentro es un punto cuya distancia a cada vértice es el doble que su distancia al punto medio del lado opuesto.

2.2 Mediatrices

Las **mediatrices de un triángulo** son las rectas perpendiculares a sus lados que pasan por el punto medio.

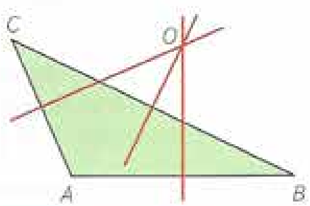


Las mediatrices se cortan en un punto llamado **circuncentro**. Este punto está a la misma distancia de los tres vértices del triángulo.

Con centro en el circuncentro, y radio, la distancia del circuncentro a cualquier vértice, se puede dibujar una circunferencia que pasa por los tres vértices: la **circunferencia circunscrita** al triángulo.

EJEMPLO

4 Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los tres vértices de este triángulo.



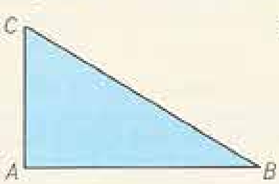
Los vértices de un triángulo se pueden considerar como los extremos de los segmentos que representan sus lados.

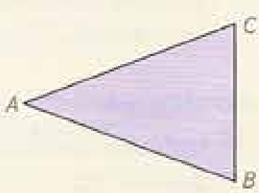
La intersección de las tres mediatrices de los lados es un punto que equidista de los vértices, es decir, el circuncentro.

EJERCICIOS

PRACTICA

4 Dibuja la circunferencia circunscrita a estos triángulos.

a) 

b) 

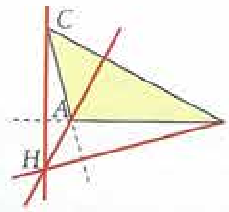
APLICA

5 Dibuja un triángulo equilátero y determina su baricentro y su circuncentro. ¿Qué observas? ¿Ocurre lo mismo en cualquier triángulo equilátero?

REFLEXIONA

6 Define el baricentro como lugar geométrico.

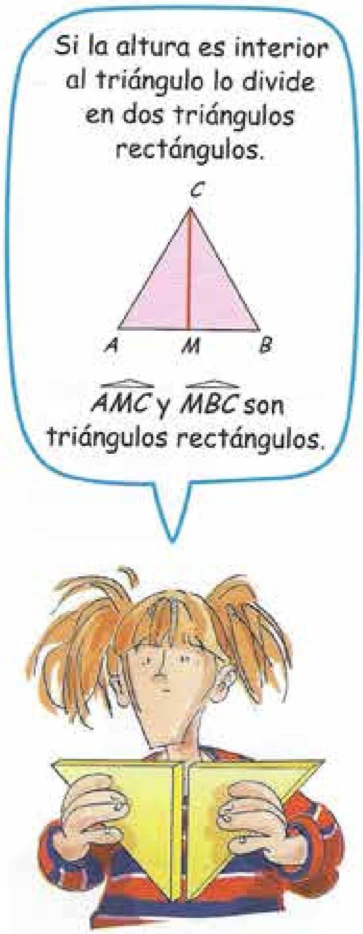
2.3 Alturas



Las **alturas de un triángulo** son las rectas perpendiculares trazadas desde cada vértice del triángulo al lado opuesto o su prolongación.

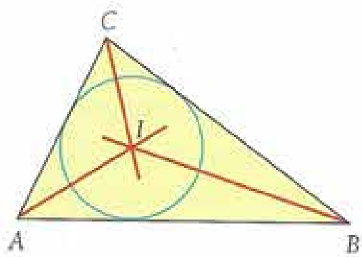
Las tres alturas del triángulo se cortan en un punto llamado **ortocentro**.

El ortocentro está situado en el interior del triángulo, en los triángulos acutángulos; en uno de sus vértices, en los triángulos rectángulos, y en el exterior, en los triángulos obtusángulos.



2.4 Bisectrices

Las **bisectrices de un triángulo** son las rectas que dividen cada uno de sus ángulos en dos partes iguales.

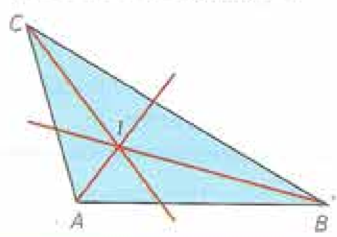


Las bisectrices se cortan en un punto llamado **incentro**. Este punto está a la misma distancia de los tres lados del triángulo.

Con centro en el incentro, y radio, la distancia del incentro a cualquier lado, se puede dibujar una circunferencia que pasa por los tres lados del triángulo: la **circunferencia inscrita**.

EJEMPLO

5 **Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los tres lados de este triángulo.**



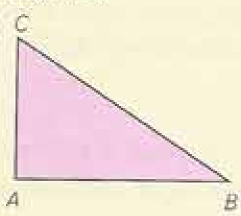
Cualquier punto de las bisectrices de los ángulos es equidistante de los dos lados que determinan el ángulo.

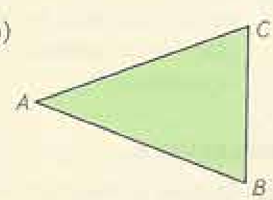
La intersección de las tres bisectrices es un punto que equidista de los tres lados, es decir, el incentro.

EJERCICIOS

PRACTICA

7 Dibuja la circunferencia inscrita de estos triángulos.

a) 

b) 

APLICA

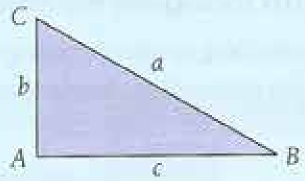
8 Dibuja un triángulo equilátero y determina su ortocentro y su incentro. ¿Qué observas? ¿Ocurre lo mismo en cualquier triángulo equilátero?

REFLEXIONA

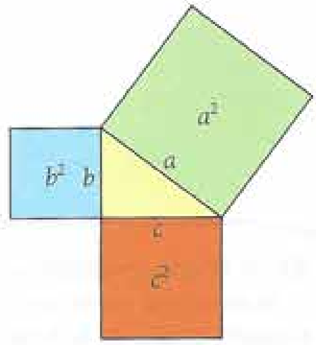
9 Define la circunferencia inscrita como lugar geométrico.

3 Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$$a^2 = b^2 + c^2$$



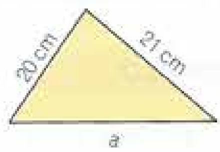
EJEMPLOS

6 **Calcula la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus catetos miden 20 y 21 cm, respectivamente.**

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{b\,=\,20,\,c\,=\,21} a^2 = 20^2 + 21^2 = 841$

Despejando a: $a = \sqrt{841} = 29$ cm



7 **Si un cateto de un triángulo rectángulo y la hipotenusa miden 5 y 13 cm, respectivamente, ¿cuánto mide el otro cateto?**

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a\,=\,13,\,b\,=\,5} 13^2 = 5^2 + c^2 \rightarrow c^2 = 13^2 - 5^2 = 144$$

Despejando c: $c = \sqrt{144} = 12$ cm

8 **Comprueba si los triángulos cuyas medidas son las siguientes son triángulos rectángulos.**

a) 48 cm, 55 cm y 73 cm

b) 3 cm, 4 cm y 6 cm

Si un triángulo es rectángulo tiene que cumplir el teorema de Pitágoras. La medida mayor siempre corresponde a la hipotenusa.

a) Hipotenusa = 73 cm Catetos = 48 cm y 55 cm

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a\,=\,73,\,b\,=\,48,\,c\,=\,55} 73^2 = 48^2 + 55^2$$
$$5\,329 = 2\,304 + 3\,025 \rightarrow 5\,329 = 5\,329$$

Luego el triángulo es rectángulo.

b) Hipotenusa = 6 cm Catetos = 3 cm y 4 cm

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a\,=\,6,\,b\,=\,3,\,c\,=\,4} 6^2 \neq 3^2 + 4^2 \rightarrow 36 \neq 9 + 16$$

Luego el triángulo no es rectángulo.

EJERCICIOS

PRACTICA

10 Calcula el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 24 cm.

11 Evalúa si las siguientes medidas determinan los lados de un triángulo rectángulo.

a) 8 cm, 5 cm y 4 cm b) 10 cm, 8 cm y 6 cm

APLICA

12 Calcula el tercer lado de un triángulo rectángulo del que conocemos los otros dos: 28 cm y 21 cm.

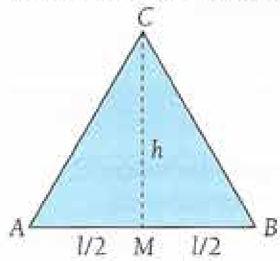
REFLEXIONA

13 Sin operar, razona por qué el triángulo de lados 35 cm, 77 cm y 85 cm no puede ser rectángulo.

4 Aplicaciones del teorema de Pitágoras

4.1 Altura de un triángulo equilátero o isósceles

Podemos hallar una altura de un triángulo equilátero, o la altura sobre el lado desigual de un triángulo isósceles, conociendo la longitud de sus lados y utilizando el teorema de Pitágoras.



En ambos casos, la altura siempre corta en el punto medio de la base.

Los triángulos $\widehat{AMC}$ y $\widehat{MBC}$ son rectángulos con hipotenusa uno de los lados del triángulo $\widehat{ABC}$, y catetos, la altura y la mitad de la base.

EJEMPLO

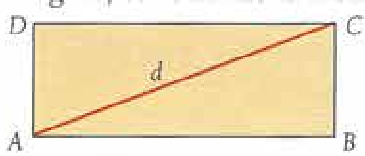
9 Calcula la altura de este triángulo isósceles.

$$5^2 = 4^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \rightarrow h = \sqrt{9} = 3\text{ cm}$$

La altura de este triángulo isósceles mide 3 cm.

4.2 Diagonal de un rectángulo

Podemos determinar la longitud de la diagonal de un cuadrado o un rectángulo, conociendo la medida de sus lados.



Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{CDA}$ son rectángulos con hipotenusa la diagonal, y catetos, dos de los lados.

EJEMPLO

10 Halla la longitud de la diagonal de este rectángulo.

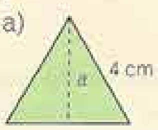
$$d^2 = 4^2 + 6^2 = 52 \rightarrow d = \sqrt{52} = 7{,}21\text{ cm}$$

La diagonal de este rectángulo mide 7,21 cm, aproximadamente.

EJERCICIOS

PRACTICA

14 Calcula el valor de a en el triángulo equilátero y el cuadrado.

a) 

b) 

APLICA

15 Determina el lado de un cuadrado cuya diagonal mide 8 cm.

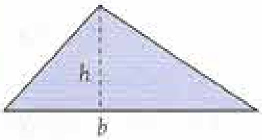
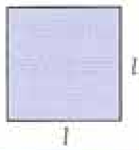
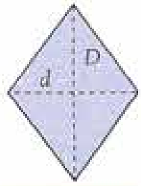
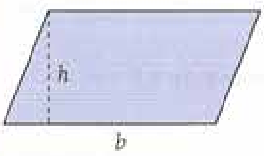
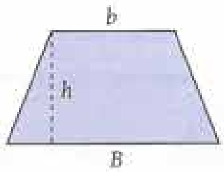
REFLEXIONA

16 Halla el lado de un triángulo equilátero de altura 28 cm.

5 Área de figuras planas

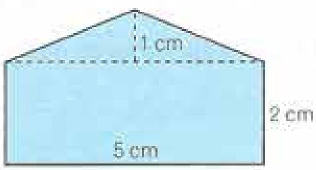
5.1 Área de triángulos y cuadriláteros

A continuación tienes las fórmulas para calcular el área de estos polígonos.

Triángulo	Cuadrado
 $A = \frac{b \cdot h}{2}$	 $A = l \cdot l = l^2$
Rectángulo	**Rombo**
 $A = b \cdot h$	 $A = \frac{D \cdot d}{2}$
Romboide	**Trapecio**
 $A = b \cdot h$	 $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$

EJEMPLO

11 Determina el área de esta figura.



Dividimos la figura en otras más simples cuya área sepamos calcular. Esta figura se puede descomponer en un rectángulo y un triángulo.

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= b \cdot h = 5 \cdot 2 = 10 \text{ cm}^2 \\ A_2 &= \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 1}{2} = 2{,}5 \text{ cm}^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow A = A_1 + A_2 = 10 + 2{,}5 = 12{,}5 \text{ cm}^2$$

El área de esta figura es 12,5 cm^2.

EJERCICIOS

PRACTICA

17 Calcula el área de los siguientes polígonos.

a) Un trapecio de bases 12 cm y 8 cm y altura 5 cm.

b) Un rombo de diagonales 12 cm y 9 cm.

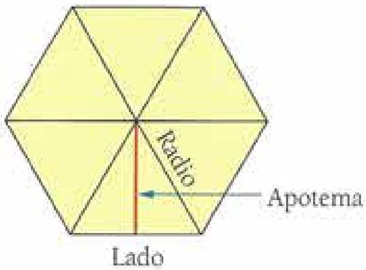
18 Halla el área de la figura.

APLICA

19 Calcula el área de un rectángulo de 3 cm de altura y 5 cm de diagonal.

REFLEXIONA

20 Halla el área de cada uno de los tres triángulos.



5.2 Área de un polígono regular

El **área de un polígono regular** es igual al producto de su perímetro por su apotema dividido entre 2.

$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

Cualquier polígono regular se puede descomponer en tantos triángulos isósceles iguales como número de lados tenga.

El área de cada triángulo es $A_t = \frac{l \cdot a}{2}$, donde l es el lado del polígono y a es la apotema. Para obtener el área del polígono hay que multiplicar por el número de triángulos en que lo hemos dividido:

$$A_{\text{Total}} = n \cdot A_t = n \cdot \frac{l \cdot a}{2} = \frac{n \cdot l \cdot a}{2} = \frac{P \cdot a}{2}$$

siendo n el número de lados y P el perímetro del polígono regular.

EJEMPLO

12 Calcula el lado de estos polígonos regulares.

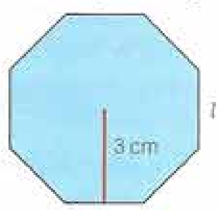
a) Un hexágono regular con área de 250 cm² y apotema de 8,5 cm.

$$A = \frac{P \cdot a}{2} \xrightarrow{A = 250;\ a = 8,5} 250 = \frac{P \cdot 8,5}{2}$$

$$\rightarrow P = \frac{250 \cdot 2}{8,5} = 58,82 \text{ cm}$$

Como el perímetro es la suma de los lados: $58,82 = 6l \rightarrow l = \frac{58,82}{6} = 9,8$ cm

b) Un octógono regular con área de 29,8 cm² y apotema de 3 cm.



$$A = \frac{P \cdot a}{2} \xrightarrow{A = 29,8;\ a = 3} 29,8 = \frac{P \cdot 3}{2}$$

$$\rightarrow P = \frac{29,8 \cdot 2}{3} = 19,87 \text{ cm}$$

$$P = 8l \rightarrow l = \frac{19,87}{8} = 2,48 \text{ cm}$$

EJERCICIOS

PRACTICA

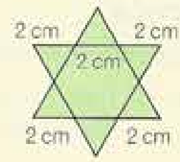
21 Halla la apotema de un heptágono regular de lado 6 cm y área 130,8 cm².

22 Calcula el área de un cuadrado de lado 7 cm, aplicando la fórmula del área de un polígono regular.

23 Determina el área de un hexágono regular de lado 6 cm.

APLICA

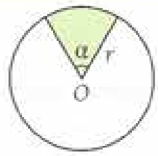
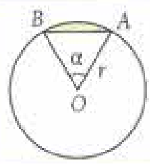
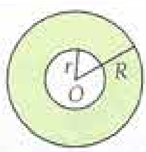
24 Halla el área de la siguiente figura. Observa que el interior es un hexágono regular.

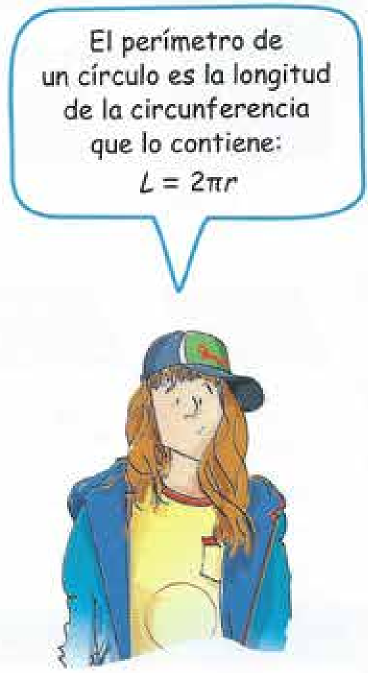


REFLEXIONA

25 Determina la altura y el perímetro de un triángulo equilátero de área 2 dm².

5.3 Área de figuras circulares

Figuras circulares		Fórmula del área
Círculo: superficie plana contenida dentro de una circunferencia.		$A = \pi r^2$
Sector circular: parte de un círculo limitado por dos radios y un arco.		$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$
Segmento circular: parte de un círculo limitado por un arco y su cuerda.		$A = A_{\text{Sector}} - A_{\text{Triángulo } \widehat{OAB}}$
Corona circular: superficie plana comprendida entre dos circunferencias concéntricas.		$A = \pi(R^2 - r^2)$



EJEMPLO

13 Halla el área de este segmento.

Aplicando el teorema de Pitágoras, hallamos la altura del triángulo:

$$r^2 = \left(\frac{34{,}64}{2}\right)^2 + h^2 \xrightarrow{r\,=\,20} 20^2 = \left(\frac{34{,}64}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\rightarrow h = \sqrt{20^2 - 17{,}32^2} = 10 \text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{Sector}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 120}{360} = 418{,}67 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{Triángulo}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{34{,}64 \cdot 10}{2} = 173{,}2 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A = A_S - A_T = 245{,}47 \text{ cm}^2$$

EJERCICIOS

PRACTICA

26 Halla el área de un círculo cuyo diámetro mide 6 cm.

27 Dos circunferencias concéntricas tienen radios de 5 y 3 cm, respectivamente. Calcula el área de la corona que originan. Halla también el área de los círculos que generan.

APLICA

28 Determina el radio de un sector circular con un ángulo de 120° y área de 31,4 cm².

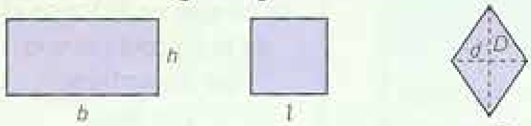
REFLEXIONA

29 ¿Qué relación hay entre los radios de dos circunferencias si la corona circular que generan es la mitad del área del círculo mayor?

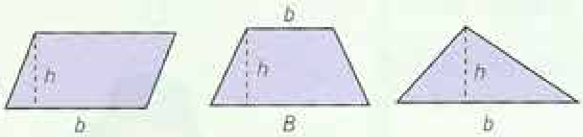
Lo esencial

COMPRENDE ESTAS PALABRAS

Área de triángulos y cuadriláteros



$A = b \cdot h$ $\qquad A = l^2 \qquad A = \dfrac{D \cdot d}{2}$

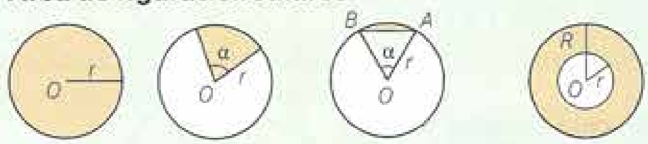


$A = b \cdot h \qquad A = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2} \qquad A = \dfrac{b \cdot h}{2}$

Área de un polígono regular

$A = \dfrac{P \cdot a}{2}$

Área de figuras circulares

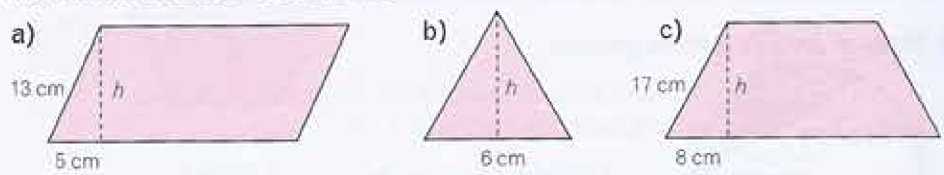


$A = \pi r^2 \qquad A = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{360} \qquad A = A_S - A_{\widehat{OAB}} \qquad A = \pi(R^2 - r^2)$

HAZLO DE ESTA MANERA

1. UTILIZAR EL TEOREMA DE PITÁGORAS PARA CALCULAR LA ALTURA DE UN POLÍGONO

Halla la altura de estos polígonos.



PRIMERO. Identificamos el triángulo rectángulo que determina la altura, y sus medidas.

SEGUNDO. Aplicamos el teorema de Pitágoras.

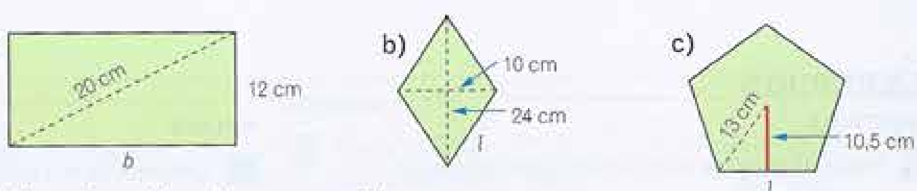
a) $13^2 = 5^2 + h^2$
$h^2 = 13^2 - 5^2$
$h^2 = 144 \rightarrow h = \sqrt{144} = 12$ cm

b) $6^2 = 3^2 + h^2$
$h^2 = 6^2 - 3^2$
$h^2 = 27 \rightarrow h = \sqrt{27} = 5{,}2$ cm

c) $17^2 = 8^2 + h^2$
$h^2 = 17^2 - 8^2$
$h^2 = 225 \rightarrow h = \sqrt{225} = 15$ cm

2. UTILIZAR EL TEOREMA DE PITÁGORAS PARA CALCULAR EL LADO DE UN POLÍGONO

Calcula el lado de estos polígonos.



PRIMERO. Identificamos el triángulo rectángulo y sus medidas.

SEGUNDO. Aplicamos el teorema de Pitágoras.

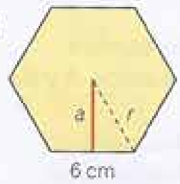
a) $20^2 = 12^2 + b^2$
$b^2 = 20^2 - 12^2$
$b^2 = 256 \rightarrow b = \sqrt{256} = 16$ cm

b) $l^2 = 12^2 + 5^2$
$l^2 = 169$
$l = \sqrt{169} = 13$ cm

c) $13^2 = 10{,}5^2 + \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 = 58{,}75$
$\rightarrow \dfrac{l}{2} = \sqrt{58{,}75} = 7{,}66 \rightarrow l = 15{,}3$ cm

3. UTILIZAR EL TEOREMA DE PITÁGORAS PARA CALCULAR LA APOTEMA DE UN POLÍGONO REGULAR

Calcula la apotema de estos polígonos regulares.

a) 

b) 

PRIMERO. El triángulo de lados el radio, la apotema y la mitad del lado es rectángulo.

Identificamos sus medidas considerando que en el hexágono regular el radio es igual al lado.

SEGUNDO. Aplicamos el teorema de Pitágoras.

a) $6^2 = 3^2 + a^2 \rightarrow a^2 = 6^2 - 3^2$

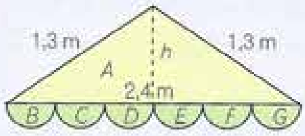
$a^2 = 27 \rightarrow a = \sqrt{27} = 5{,}2$ cm

b) $17{,}5^2 = 6^2 + a^2 \rightarrow a^2 = 17{,}5^2 - 6^2$

$a^2 = 270{,}25 \rightarrow a = \sqrt{270{,}25} = 16{,}44$ cm

4. CALCULAR EL ÁREA DE UNA FIGURA PLANA

Determina el área de esta figura.



PRIMERO. Descomponemos la figura en otras cuyas áreas sepamos calcular.

FIGURA $A \rightarrow$ Triángulo isósceles con lados iguales de 1,3 m y base de 2,4 m.

FIGURAS B, C, D, E, F y $G \rightarrow$ Semicírculos iguales de diámetro $2{,}4 : 6 = 0{,}4$ m.

SEGUNDO. Hallamos cada una de las áreas de las figuras que hemos obtenido en la descomposición.

FIGURA $A \rightarrow$ Calculamos h.

$h^2 = 1{,}3^2 - 1{,}2^2 = 0{,}25 \rightarrow h = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ m $\quad A_{\text{Figura } A} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{2{,}4 \cdot 0{,}5}{2} = 0{,}6\ \text{m}^2$

FIGURA $B \rightarrow$ Calculamos r.

$r = 0{,}4 : 2 = 0{,}2$ m $\quad A_{\text{Figura } B} = \dfrac{\pi r^2}{2} = \dfrac{\pi \cdot 0{,}2^2}{2} = 0{,}06\ \text{m}^2$

TERCERO. Operamos para obtener el área total. $\quad A_{\text{Total}} = A_{\text{Figura } A} + 6 \cdot A_{\text{Figura } B} = 0{,}6 + 6 \cdot 0{,}06 = 0{,}96\ \text{m}^2$

Y AHORA... PRACTICA

Comprende estas palabras

1. Calcula el área de un trapecio cuyas bases miden 8 cm y 5 cm, y su altura, 3 cm.
2. Halla el área de una corona circular comprendida entre dos circunferencias de radios 5 cm y 3 cm.

Utilizar el teorema de Pitágoras para calcular la altura de un polígono

3. Calcula el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 10 cm.

Utilizar el teorema de Pitágoras para calcular el lado de un polígono

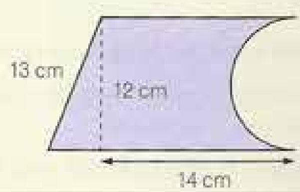
4. ¿Cuánto mide el lado de un rombo cuyas diagonales miden 2 cm y 4 cm?

Utilizar el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de un polígono regular

5. Calcula el área de un hexágono regular de perímetro 24 cm.

Calcular el área de una figura plana

6. Halla el área de la figura.



Actividades

LUGARES GEOMÉTRICOS. ELEMENTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

30. ● Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos puntos *A* y *B*.

31. ● Obtén el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados de un ángulo de 180°.

32. ●● Determina el lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias de radio *r* que pasan por un punto *P*.

33. ● Dibuja varios triángulos rectángulos y señala su ortocentro. ¿Dónde se encuentra situado?

34. ●● Dibuja tres puntos que no estén alineados y traza la circunferencia que pasa por ellos.

35. ●● En un triángulo rectángulo e isósceles, la hipotenusa mide 10 cm. Si se traza una circunferencia circunscrita, ¿cuál es el radio?

36. ●● En un triángulo equilátero de perímetro 36 cm se traza la circunferencia circunscrita. Sabiendo que la mediana mide 10,39 cm, ¿cuál es el radio de la circunferencia?

37. ●● En un triángulo rectángulo, el baricentro, el ortocentro, el circuncentro y el incentro son puntos situados:

a) En el exterior del triángulo.
b) En el interior del triángulo.
c) Sobre un lado.

38. ●● En un triángulo rectángulo e isósceles, señala el circuncentro y el ortocentro. El segmento que une estos dos puntos del triángulo es:

a) Mediana
b) Mediatriz
c) Altura
d) Bisectriz

¿Se verifica esto también en un triángulo rectángulo y escaleno?

39. ●● En un triángulo rectángulo e isósceles:

a) La altura correspondiente a la hipotenusa, ¿es mayor que un cateto?
b) La mediana correspondiente a la hipotenusa, ¿es mayor o menor que un cateto?

TEOREMA DE PITÁGORAS

40. ● La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 12 cm y uno de los catetos 6 cm. Obtén la longitud del otro cateto.

41. ● Calcula la longitud del lado que falta en cada triángulo rectángulo (*a* es la hipotenusa).

a) $a = 34$ cm, $b = 30$ cm
b) $b = 28$ cm, $c = 21$ cm

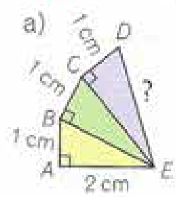
42. ●● Halla la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus catetos se diferencian en 2 cm y que el menor mide 6 cm.

43. ● Determina si los siguientes triángulos son rectángulos. En caso afirmativo, indica la medida de la hipotenusa y los catetos.

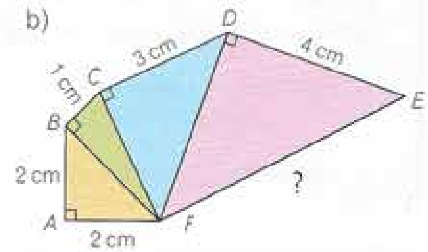
a) Triángulo de lados 5 cm, 12 cm y 13 cm.
b) Triángulo de lados 6 cm, 8 cm y 12 cm.
c) Triángulo de lados 5 cm, 6 cm y $\sqrt{61}$ cm.
d) Triángulo de lados 7 cm, 24 cm y 25 cm.

44. ●● Halla la longitud de los segmentos indicados.

a)



b)



45. ● En un triángulo isósceles sabemos que los lados iguales miden 7 cm y el otro lado es de 4 cm. Calcula su altura.

46. ●● Halla la altura de un triángulo equilátero de perímetro 30 cm.

47. ●● Obtén la longitud de la base de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 17 cm y su altura 8 cm.

48. ●● Halla la longitud de los lados iguales de un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 42 cm y su altura 20 cm.

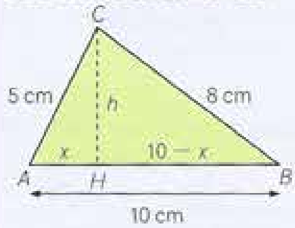
49. ●● Determina la longitud del lado de un triángulo equilátero cuya altura es de 6 cm.

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA UNA ALTURA DE UN TRIÁNGULO CUALQUIERA CONOCIENDO SUS LADOS?

50. Calcula la altura de un triángulo de lados 5 cm, 8 cm y 10 cm.

PRIMERO. Se dibuja el triángulo y se nombra cada uno de sus elementos.



La altura divide a la base en dos partes:

- AH, cuya longitud se llama x.
- HB, cuya longitud será $10 - x$.

SEGUNDO. Se aplica el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos resultantes.

En $\widehat{AHC}$: $5^2 = x^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 5^2 - x^2$

En $\widehat{HBC}$: $8^2 = (10 - x)^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 8^2 - (10 - x)^2$

TERCERO. Se igualan ambas expresiones y se resuelve la ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} h^2 = 5^2 - x^2 \\ h^2 = 8^2 - (10 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 5^2 - x^2 = 8^2 - (10 - x)^2$$

$$25 - x^2 = 64 - (100 + x^2 - 20x)$$
$$25 - x^2 = 64 - 100 - x^2 + 20x$$
$$20x = 61 \rightarrow x = 3{,}05 \text{ cm}$$

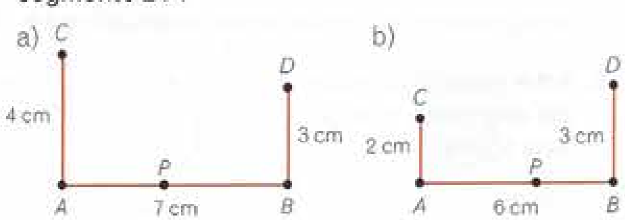
CUARTO. Se calcula h.

$$h^2 = 5^2 - x^2 \rightarrow h = \sqrt{5^2 - 3{,}05^2} = 3{,}96 \text{ cm}$$

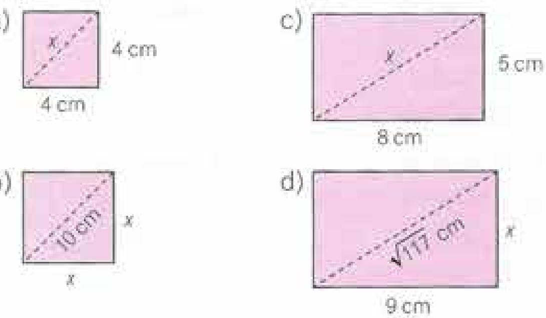
51. ●● Calcula la altura de un triángulo cuyos lados miden:

a) $\overline{AB} = 4$ cm $\quad \overline{BC} = 7$ cm $\quad \overline{CA} = 9$ cm
b) $\overline{AB} = 6$ cm $\quad \overline{BC} = 10$ cm $\quad \overline{CA} = 14$ cm
c) $\overline{AB} = 5$ cm $\quad \overline{BC} = 11$ cm $\quad \overline{CA} = 15$ cm

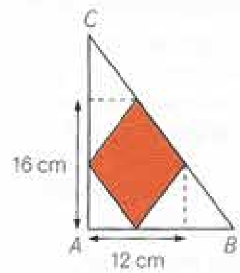
52. ●●● Observando los dibujos, halla la distancia del punto P al punto A, para que se verifique que la longitud del segmento CP sea igual que la del segmento DP.



53. ● Calcula la longitud de x en las figuras.

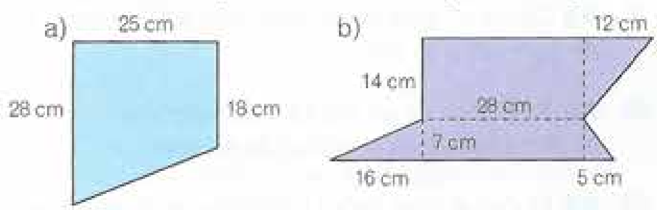


54. ●● Observa la figura y calcula.

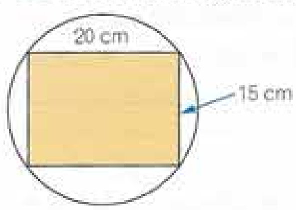


a) El lado del rombo.
b) La longitud del cateto AB, del cateto AC y de la hipotenusa BC.

55. ●● Calcula el perímetro de las siguientes figuras.

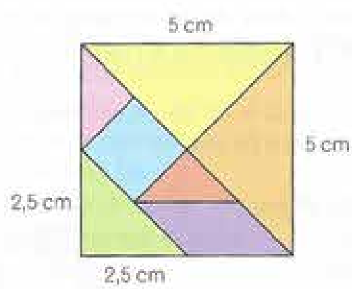


56. ●● Observa la siguiente figura:



Si los lados del rectángulo son 15 cm y 20 cm, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia?

57. ●●● Considera las siete piezas del *tangram* chino.



Calcula el área de cada una de las piezas de este *tangram*.

ÁREA DE FIGURAS PLANAS

58. ● Elige la respuesta correcta en cada caso.

a) El área de un rombo de diagonales 2 cm y 4 cm, es:

I) 4 cm^2 III) 6 cm^2
II) 2 cm^2 IV) 12 cm^2

b) El área de un trapecio de bases 10 cm y 8 cm y altura 6 cm, es:

I) 240 cm^2 III) 108 cm^2
II) 54 cm^2 IV) 60 cm^2

c) El área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 10 cm, es:

I) 86,6 cm^2 III) 43,3 cm^2
II) 50 cm^2 IV) 100 cm^2

59. ●● El área de un triángulo isósceles es 24 m^2 y el lado desigual mide 6 m. Halla la longitud de los otros lados.

60. ●● El área de un triángulo rectángulo es 12 cm^2 y uno de los catetos mide 6 cm. Calcula la longitud de la hipotenusa.

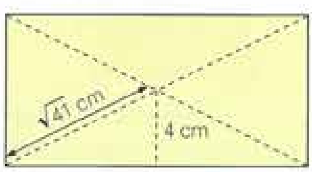
61. ●● Obtén el área de un triángulo equilátero de perímetro 90 cm.

62. ●● Si el área de un triángulo equilátero es 30 cm^2, halla la longitud de su lado.

63. ●● Obtén el área de un triángulo rectángulo de hipotenusa 13 cm, siendo uno de los catetos 5 cm.

64. ●● Calcula el área de un cuadrado sabiendo que su diagonal mide 7,07 cm.

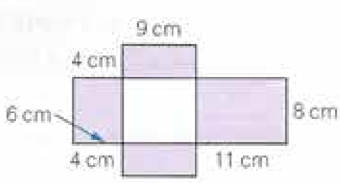
65. ●● Halla el área de este rectángulo.



66. ●● Calcula el área de un rectángulo cuya base mide 10 cm y la diagonal $\sqrt{116}$ cm.

67. ●● Determina el área de un rectángulo de base 7 cm y perímetro 24 cm.

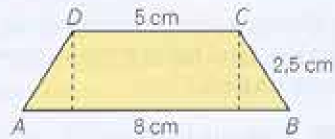
68. ●● Calcula el área de la zona sombreada.



HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA DE UN TRAPECIO ISÓSCELES SI SE DESCONOCE LA ALTURA?

69. Calcula el área de este trapecio isósceles.



PRIMERO. Se calcula la base del triángulo rectángulo que determina la altura.

Por ser el trapecio isósceles, las alturas determinan dos triángulos rectángulos iguales cuyas bases son la mitad de la diferencia de las bases del trapecio.

$$\overline{AE} = \overline{FB} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2} = \frac{8-5}{2} = 1,5 \text{ cm}$$

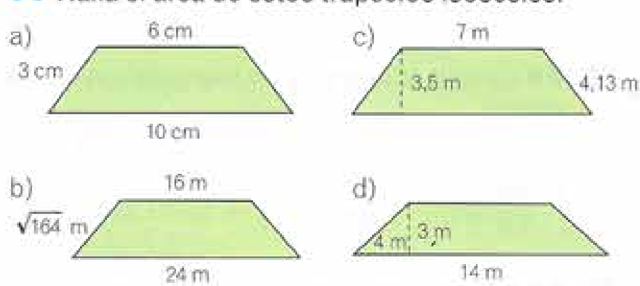
SEGUNDO. Se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que determina la altura.

$$1,5^2 + h^2 = 2,5^2$$
$$h^2 = 2,5^2 - 1,5^2 = 4$$
$$h = \sqrt{4} = 2 \text{ cm}$$

TERCERO. Se halla el área del trapecio.

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(8+5)\cdot 2}{2} = 13 \text{ cm}^2$$

70. ●● Halla el área de estos trapecios isósceles.

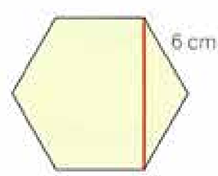


71. ●● Calcula el área de:

a) Un hexágono regular de lado 2 cm.

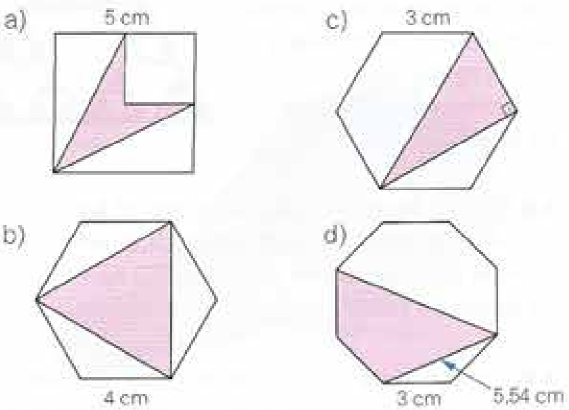
b) Un octógono regular de perímetro 48 cm.

72. ●●● Halla la longitud del segmento rojo de esta figura.



- 66 -

73. ●● Determina el área de las superficies coloreadas.



74. ●● Calcula el área de un círculo circunscrito a un triángulo rectángulo de catetos 6 cm y 8 cm.

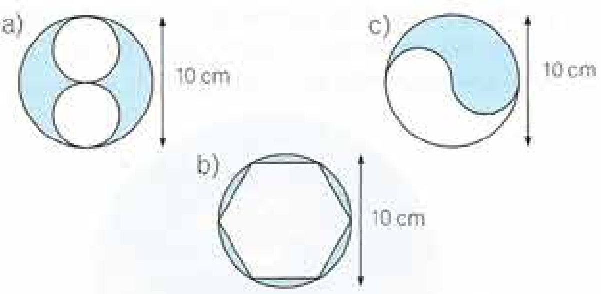
75. ●● Halla el área de la corona circular limitada por las circunferencias circunscrita e inscrita de un cuadrado de lado 8 cm.

76. ●● Calcula el área de un sector circular de amplitud 60°, y radio, el de una circunferencia de longitud 12π cm.

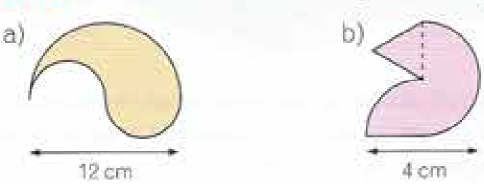
77. ●● Obtén el área de un círculo cuyo diámetro es igual que el perímetro de un cuadrado de lado 7 cm.

78. ●● En una circunferencia de radio 5 cm se inscribe un triángulo rectángulo e isósceles. Calcula el área comprendida entre el círculo y el triángulo.

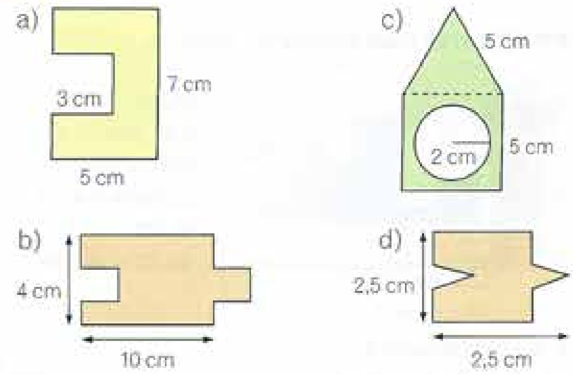
79. ●● Halla el área de la zona coloreada, sabiendo que el diámetro de la circunferencia mide 10 cm.



80. ●●● Calcula el área de las siguientes figuras.



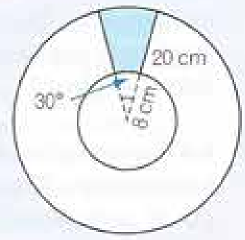
81. ●●● Determina el área de las figuras.



HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA DE UN TRAPECIO CIRCULAR?

82. Calcula el área de esta parte de corona circular limitada por dos radios (trapecio circular).



PRIMERO. Se halla el área de los sectores circulares. En este caso tienen una amplitud de 30°, y sus radios miden 20 y 8 cm, respectivamente.

$$A_1 = \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 30}{360} = 104{,}67 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 30}{360} = 16{,}75 \text{ cm}^2$$

SEGUNDO. Se restan las áreas de los dos sectores.

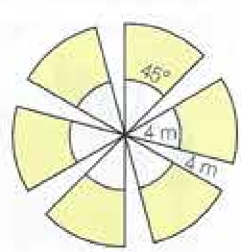
$$A_1 - A_2 = 104{,}67 - 16{,}75 = 87{,}92 \text{ cm}^2$$

El área del trapecio circular es de 87,92 cm², aproximadamente.

83. ●● Calcula el área del trapecio circular generado por la corona circular de la actividad anterior y de amplitud 120°.

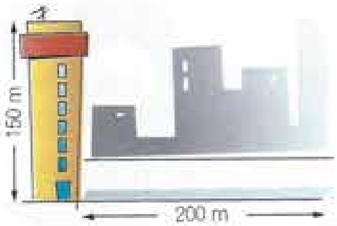
84. ●● Halla el área de un trapecio circular de radios 12 cm y 6 cm y de amplitud 270°.

85. ●● Observa la margarita y calcula el área de cada pétalo de la parte amarilla, de la parte blanca y su área total.



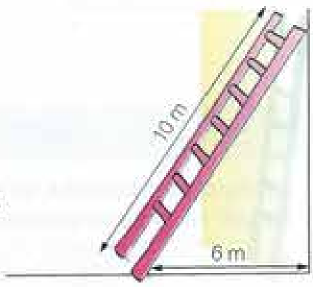
PROBLEMAS CON ÁREAS

86. ●● Observa esta torre y su sombra.



¿Qué distancia hay desde el punto más alto de la torre hasta el extremo de la sombra?

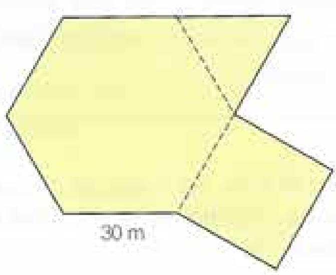
87. ●● Una escalera de 10 m de longitud está apoyada sobre una pared. El pie de la escalera dista 6 m de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?



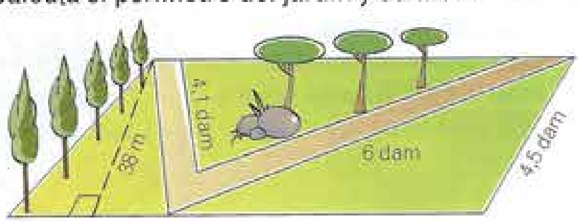
88. ●● En los lados de un campo cuadrangular se han plantado 32 árboles, separados 5 m entre sí. ¿Cuál es su área? ¿Cuánto mide el lado?

89. ●● Esta señal de tráfico indica la obligatoriedad de parar. Halla su área si su altura es 90 cm y su lado mide 37 cm.

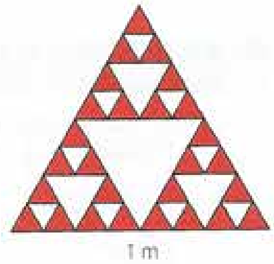
90. ●●● Cada uno de los 50 pisos de un edificio tiene la planta de esta figura, siendo el lado del hexágono de 30 m. Si el suelo tiene una moqueta que cuesta 20 €/m², calcula el precio total pagado por la moqueta del edificio.



91. ●●● Mario tiene un jardín en forma de romboide. Uno de sus lados mide 45 m y hay un camino, del que también conocemos sus medidas. Calcula el perímetro del jardín y su área.



92. ●●● Hemos colocado una vidriera triangular. Calcula el área acristalada en color rojo, sabiendo que la ventana es un triángulo equilátero de lado 1 m.



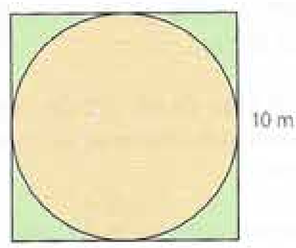
93. ●● En una pista circular se echan 15 kg de arena por metro cuadrado. ¿Qué radio tiene la pista si se han echado 4710 kg de arena en total?

94. ●● En otra pista circular de 30 m de diámetro se quieren echar 30 kg de arena por metro cuadrado.

a) ¿Cuántas toneladas de arena se necesitan?

b) Si una carretilla mecánica carga 157 sacos de 5 kg cada uno, ¿cuántos desplazamientos tendrá que realizar?

95. ●● Se desea hacer un círculo con losas en un jardín cuadrado, como indica la figura.



a) ¿Cuánto mide el área enlosada?

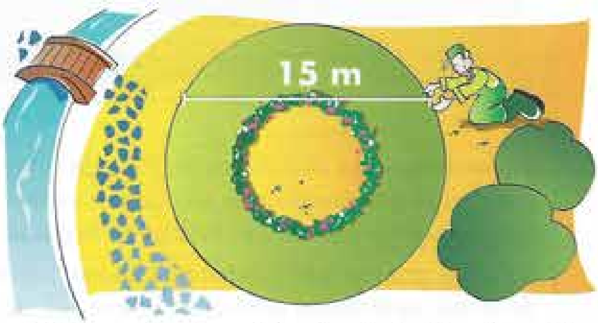
b) ¿Qué área ha quedado con césped?

96. ●●● Un repostero ha cubierto de azúcar la parte superior de 200 rosquillas como la de la figura. Si ha utilizado 5 kg de azúcar, ¿cuántos gramos de azúcar se necesitan para cubrir cada centímetro cuadrado de rosquilla?

97. ●● Construimos la montura de un monóculo con 10 cm de alambre. ¿Cuál es el área de la lente que encaja en la montura?

98. ●● Calcula el área que puede grabarse (en color azul en la fotografía) de un disco compacto. ¿Qué porcentaje del área total del disco se aprovecha para grabar?

99. ●●● Un jardinero ha plantado una zona de césped en forma de corona circular. La longitud del segmento mayor que puede trazarse en ella es de 15 m.

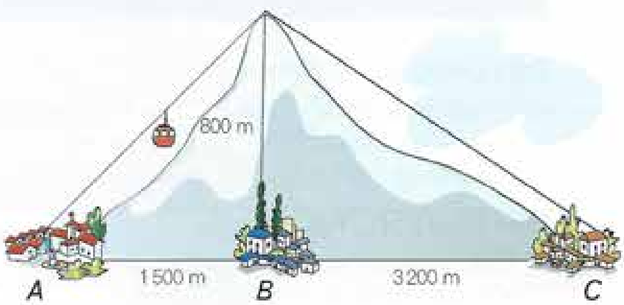


¿Qué área de césped ha plantado el jardinero?

100. ●● Esta es la bandera de Brasil.

Mide y calcula qué porcentaje del área total supone el área de cada color.

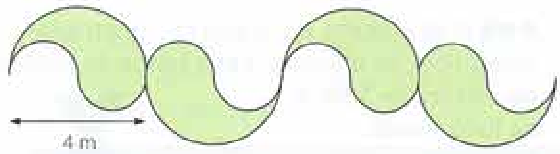
101. ●● El teleférico de la ciudad *A* sale de la base de una montaña y llega hasta la cima. Desde ese punto se dirige a la ciudad *B* o a la ciudad *C*.

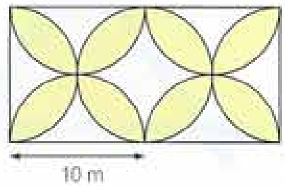


a) ¿Qué distancia recorre el teleférico desde la ciudad *A* hasta *C*?

b) ¿Y desde *A* hasta *B*?

102. ●●● Un pintor decora una valla con una de estas figuras.



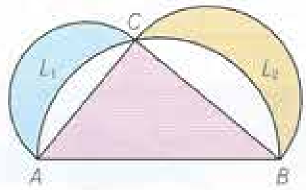


Si cobra el metro cuadrado de valla pintada a 32 €, ¿cuánto cobrará por cada una?

INVESTIGA

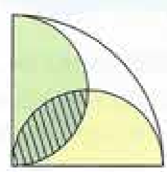
103. ●●● En un triángulo cualquiera se trazan sus medianas, formándose 6 triángulos que tienen como vértice común el baricentro. Justifica que todos tienen la misma área. A partir de este resultado, demuestra que el baricentro dista de cada vértice el doble que del punto medio del lado opuesto.

104. ●●● ¿Qué es mayor, el área del triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ o la suma de las áreas de L_1 y L_2?

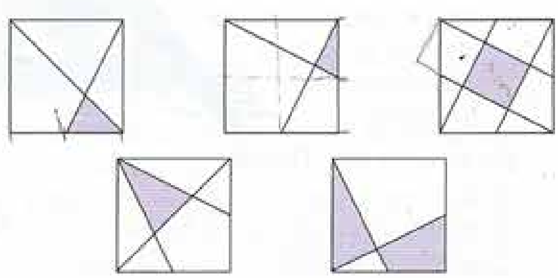


(Las circunferencias que ves tienen como diámetro cada uno de los lados del triángulo.)

105. ●●● Compara las áreas de la zona rayada y de la zona blanca.

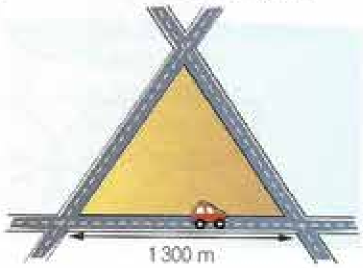


106. ●●● Los segmentos trazados en estos cuadrados son diagonales o unen vértices del cuadrado con puntos medios de lados opuestos. ¿Qué fracción del área del cuadrado está sombreada?



Pon a prueba tus capacidades

107. ●●● Una parcela, en la que se construirá un edificio de oficinas, tiene forma de triángulo equilátero de 1 300 m de lado y está bordeada por tres carreteras.



El contratista de la obra y el arquitecto han coincidido en la ubicación del edificio.

ERES CAPAZ DE... COMPRENDER

a) ¿Qué ventajas y qué inconvenientes presenta el lugar elegido para la ubicación del edificio?

ERES CAPAZ DE... RESOLVER

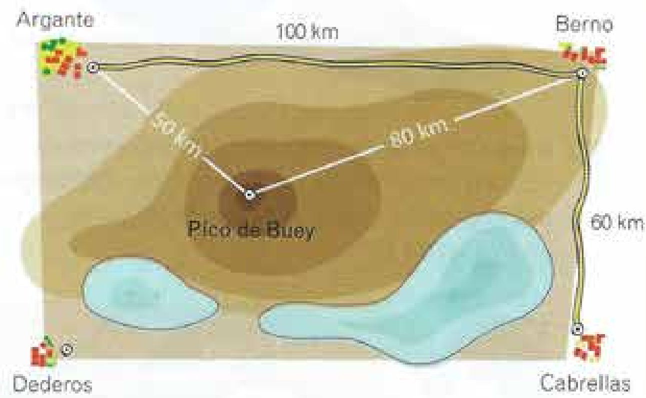
b) Si las vías de salida parten desde el punto en el que se construirá el edificio, y el metro lineal de construcción cuesta 1 150 €, ¿cuál será el coste de las tres vías que se tienen que construir?

ERES CAPAZ DE... DECIDIR

c) Si lo que prima en la obra es el coste, ¿se te ocurre algún otro punto del terreno donde construir el edificio fuese más barato?

108. ●●● Se quiere colocar un repetidor en la cima de una montaña para asegurar las comunicaciones de cuatro localidades que hay en la zona.

Las cuatro localidades están situadas en los vértices de un rectángulo, y se conocen algunas de las distancias que hay entre ellas y la cima de la montaña.



Sin embargo, las distancias de Pico de Buey a los otros dos pueblos no se pueden medir fácilmente porque existe un lago en la mitad.

Se sabe, por las mediciones que se han hecho de otros repetidores similares, que la señal es aceptable hasta una distancia que no sea superior a 90 km del repetidor.

ERES CAPAZ DE... COMPRENDER

a) ¿Cuál es la distancia de Pico de Buey a cada una de las localidades? ¿Son todas las distancias conocidas?

ERES CAPAZ DE... RESOLVER

b) Calcula la distancia desde Pico de Buey a la carretera de Argante a Berno.

ERES CAPAZ DE... DECIDIR

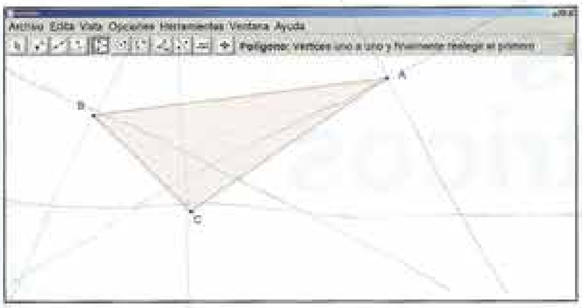
c) ¿Crees que será aceptable la señal en las localidades de Cabrellas y Dederos?

Matemáticas con ordenador

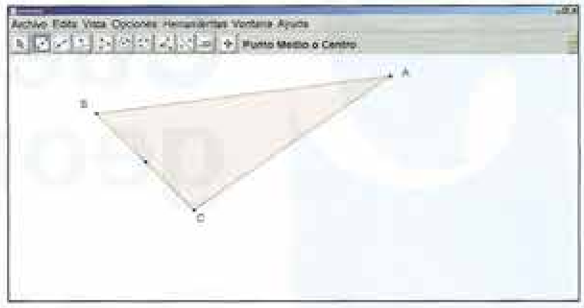
GeoGebra
www.geogebra.org

Dibuja un triángulo de vértices *A*, *B* y *C*, y calcula su baricentro.

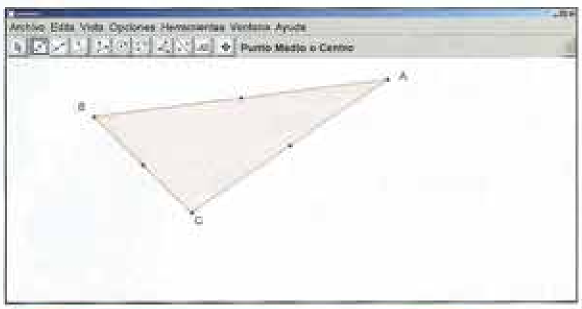
1. Seleccionamos la herramienta, marcamos tres vértices, y volviendo a marcar el primero, completamos el triángulo.



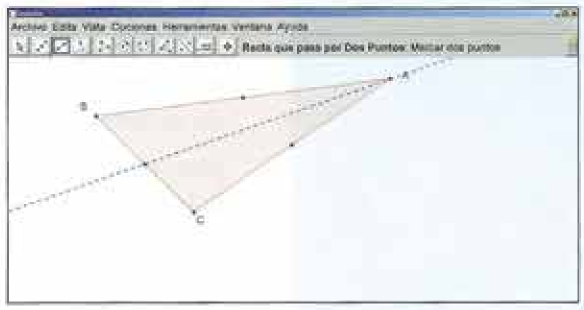
2. Seleccionamos la herramienta y señalando uno de los lados del triángulo, aparecerá el punto medio de dicho lado.



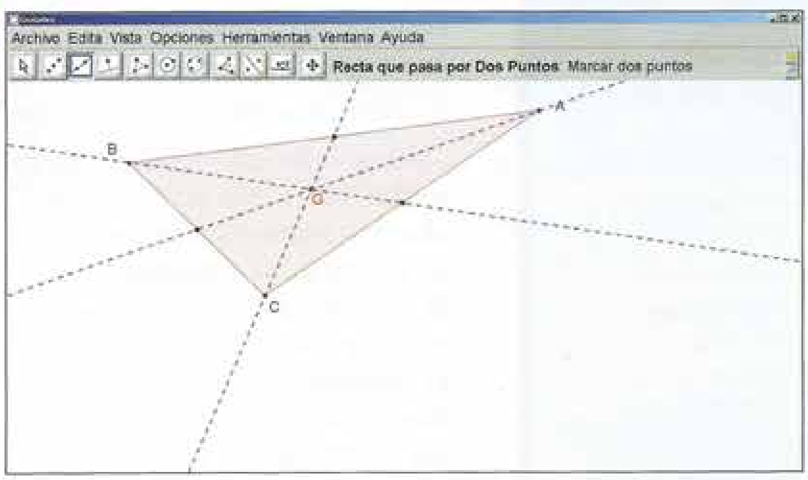
3. Con la misma herramienta, repetimos la operación para dibujar los puntos medios de los otros dos lados del triángulo.



4. Seleccionamos la herramienta, y señalando un vértice y el punto medio del lado opuesto, construimos una mediana.



5. Realizamos la misma operación para construir las otras dos medianas y comprobamos que se cortan en un punto, el baricentro *G*.



ACTIVIDADES

PRACTICA

1. Dibuja un triángulo de vértices *A*, *B* y *C*, y calcula su ortocentro.

2. Dibuja el circuncentro de un triángulo y traza también su circunferencia circunscrita.

INVESTIGA

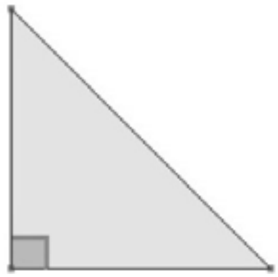
3. Comprueba la siguiente propiedad de los puntos notables de un triángulo:

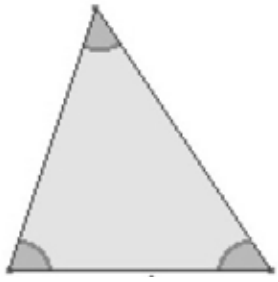
El baricentro, el ortocentro y el circuncentro de cualquier triángulo están alineados.

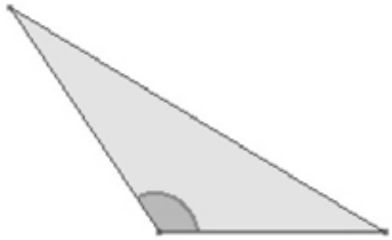
Anexo II
Actividad con Geogebra
Rectas y puntos notables de un triángulo

1 CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

Según sus ángulos

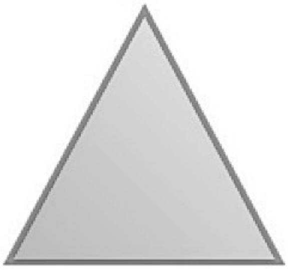


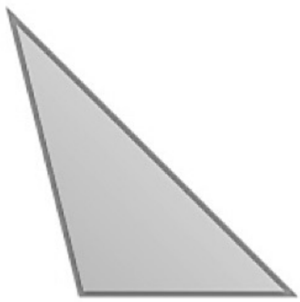




______________________	______________________	______________________
1 ángulo recto	3 ángulos agudos	1 ángulo obtuso

Según sus lados

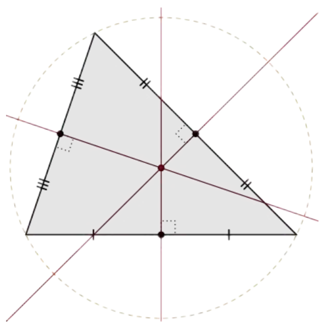




______________________	______________________	______________________
3 lados iguales	2 lados iguales	ningún lado igual

2 RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO (I)

Mediatriz



- Las mediatrices de un triángulo son las rectas____________________

____

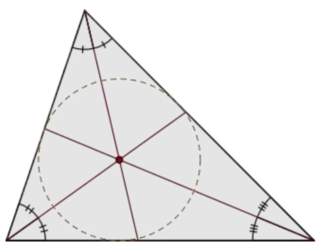
____

____

____

- Se cortan en el **circuncentro O**
- La circunferencia con centro en el circuncentro y que pasa por los tres vértices es la **circunferencia circunscrita**

Bisectriz



- Las bisectrices de un triángulo son las rectas____________________

____

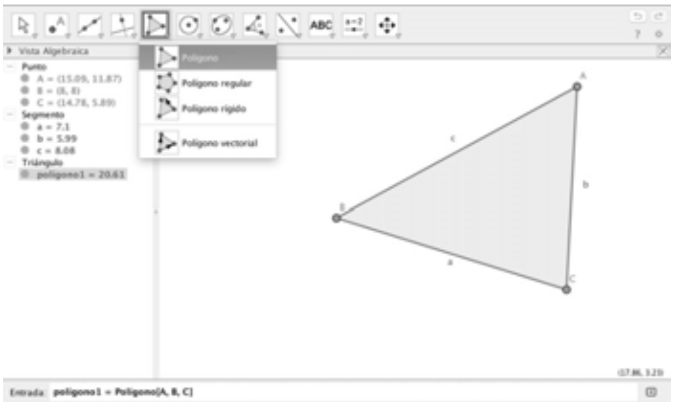
____

____

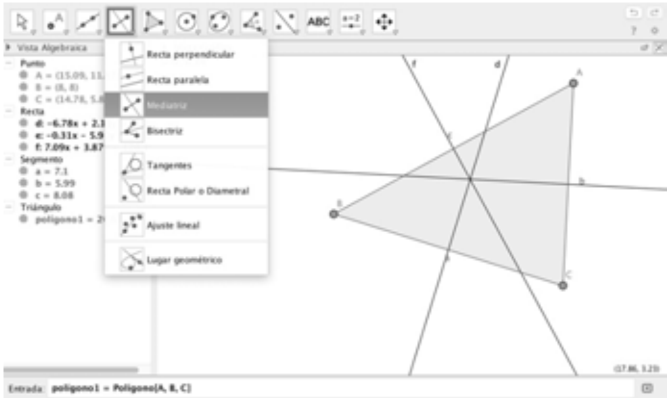
____

- Se cortan en el **incentro I**
- La circunferencia con centro en el incentro y de radio la distancia a cualquier lado es la **circunferencia inscrita**

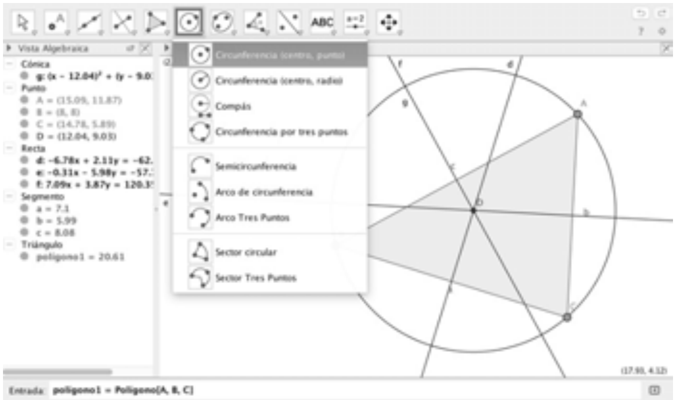
3 PRÁCTICA DE LA MEDIATRIZ CON GEOGEBRA



1. Seleccionamos la herramienta Polígono, marcamos tres vértices, y volviendo a marcar el primero, completamos el triángulo.



2. Seleccionamos la herramienta Mediatriz, y señalando cada uno de los lados del triángulo, aparecerá la mediatriz de dicho lado. Comprobamos que las mediatrices se cortan en el **circuncentro**.



3. Ahora vamos a verificar que la circunferencia trazada con centro en el circuncentro y radio la distancia hasta cualquiera de los puntos pasa por todos ellos. Selecciona la herramienta Círculo (centro, punto). Pincha primero en el circuncentro, y después en cuaquiera de los vértices del triángulo. La circunferencia dibujada es la **circunscrita**.

¡PRACTICA TÚ SOLO!

Repite el mismo ejercicio y dibuja el **circuncentro** en un **triángulo rectángulo.** Después, dibuja también el **ortocentro.**

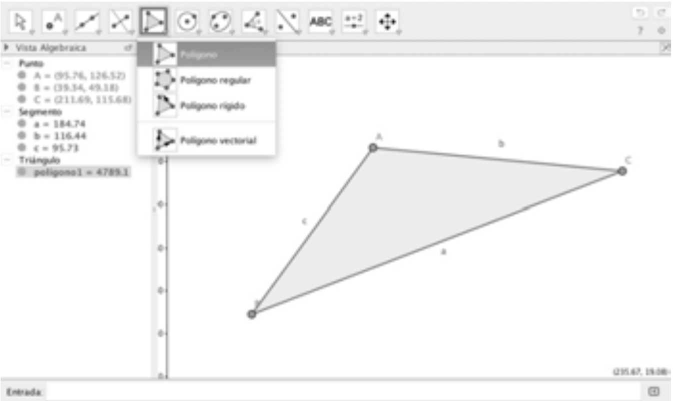
¿Qué ocurre con dichos puntos?

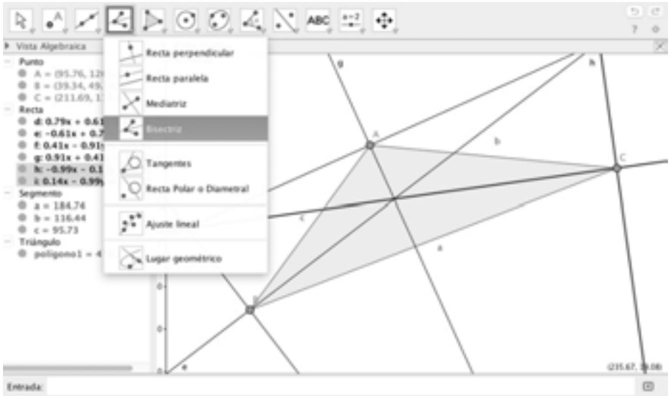
Prueba ahora con un **triángulo isósceles.** Recuerda que dos de sus lados tienen que ser exactamente de la misma longitud.

¿Cómo lo has dibujado?

NOTAS

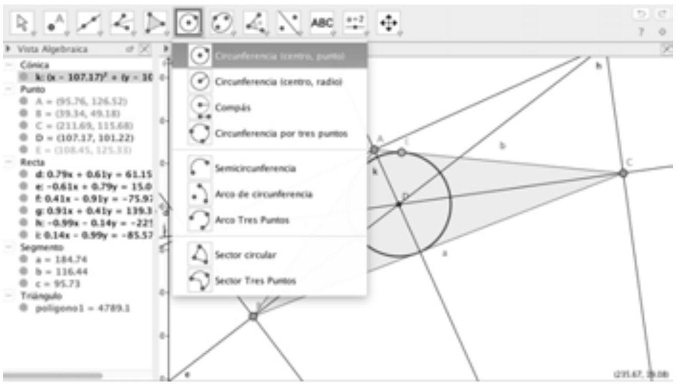
4 PRÁCTICA DE LA BISECTRIZ CON GEOGEBRA





1. Seleccionamos la herramienta Polígono, marcamos tres vértices, y volviendo a marcar el primero, completamos el triángulo.

2. Seleccionamos la herramienta Bisectriz, y señalando los dos segmentos que forman el ángulo que queremos dividir, aparecerán la bisectriz de dicho ángulo y la de sus complementarios. Comprobamos que las bisectrices se cortan en el **incentro**.



3. Ahora vamos a verificar que la circunferencia trazada con centro en el incentro y radio la distancia hasta cualquiera de los lados del triángulo pasa por todos ellos. Selecciona la herramienta Círculo (centro, punto). Pincha primero en el circuncentro, y después en cualquiera de los lados del triángulo. La circunferencia dibujada es la **inscrita**.

¡PRACTICA TÚ SOLO!

Repite el mismo ejercicio pero con un **triángulo rectángulo.**

¿Qué ocurre con el incentro?

___

___

Prueba ahora con otro **triángulo rectángulo.**

¿Ocurre lo mismo? ¿Podríamos afirmar que ocurrirá siempre?

___

___

___

___

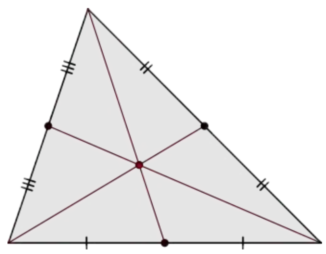
___

___

NOTAS

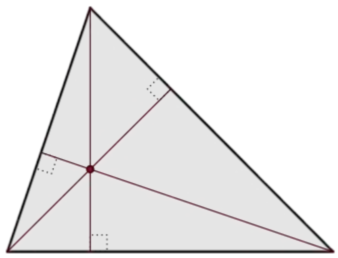
5 RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO (II)

Medianas



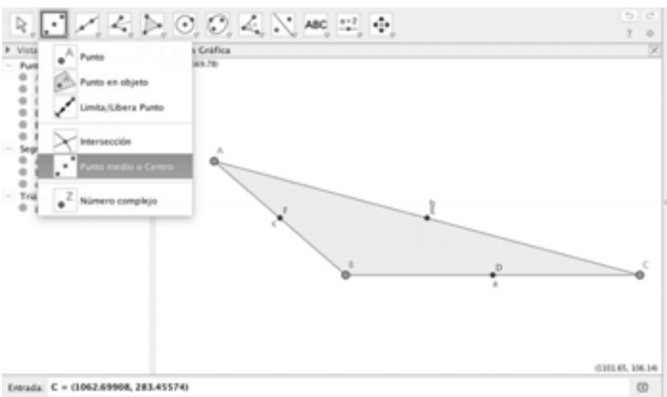
- Las medianas de un triángulo son las rectas____________________
____
____
____
____
- Se cortan en el **baricentro G**

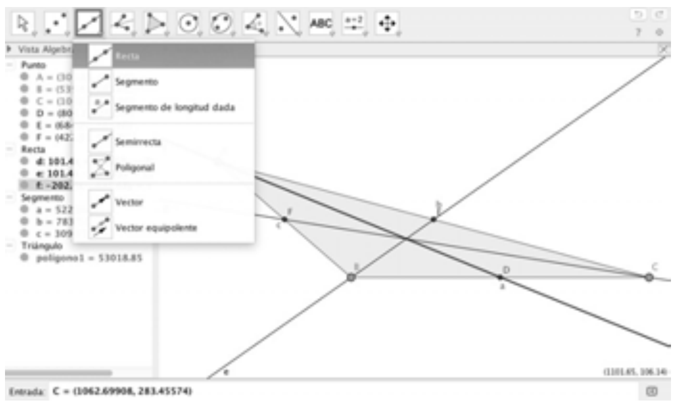
Alturas



- Las alturas de un triángulo son las rectas____________________
____
____
____
____
- Se cortan en el **ortocentro H**

6 PRÁCTICA DE LA MEDIANA CON GEOGEBRA





1. De nuevo seleccionamos la herramienta Polígono, marcamos tres vértices, y volviendo a marcar el primero, completamos el triángulo. Esta vez vamos a empezar con un triángulo **obtusángulo**. Ahora seleccionamos la herramienta Punto medio o Centro, y señalando cada uno de los lados del triángulo, aparecerán los tres puntos medios.
2. Por último, unimos cada vértice con el punto medio del lado opuesto. El punto que hemos obtenido se denomina **baricentro**.

7 PRÁCTICA DE LAS ALTURAS CON GEOGEBRA

¡PRACTICA TÚ SOLO!

Ahora prueba a dibujar el **ortocentro** de un triángulo **acutángulo** y de otro **rectángulo**. ¿Qué diferencias encuentras respecto a la posición relativa del triángulo y su ortocentro?

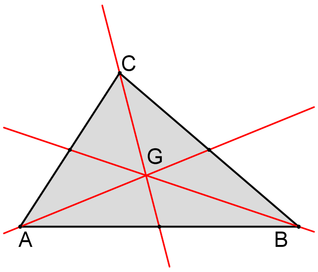
____
____

Anexo III
Actividad de dibujo a mano
Rectas y puntos
notables de un triángulo

NOMBRE:____

RECORDAMOS LO APRENDIDO

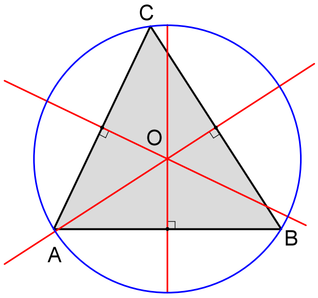
MEDIANAS



¿QUÉ TRAZAMOS?
las rectas que unen los vértices del triángulo con el punto medio del lado opuesto.

¿CÓMO SE LLAMA EL PUNTO DONDE SE CORTAN?
Baricentro G.

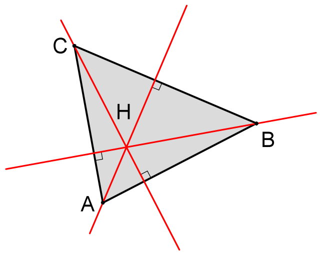
MEDIATRICES



¿QUÉ TRAZAMOS?
Las rectas perpendiculares a cada uno de los lados que pasan por su punto medio.

¿CÓMO SE LLAMA EL PUNTO DONDE SE CORTAN?
Circuncentro O. Este punto está a la misma distancia de los tres vértices y la circunferencia que pasa por ellos se llama **circunferencia circunscrita.**

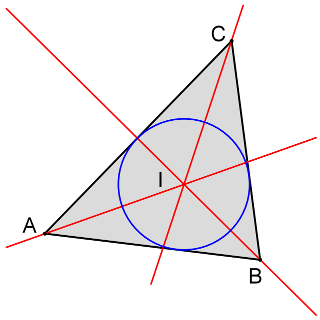
ALTURAS



¿QUÉ TRAZAMOS?
Las rectas perpendiculares a cada uno de los lados que pasan por el vértice opuesto.

¿CÓMO SE LLAMA EL PUNTO DONDE SE CORTAN?
Ortocentro H.

BISECTRICES

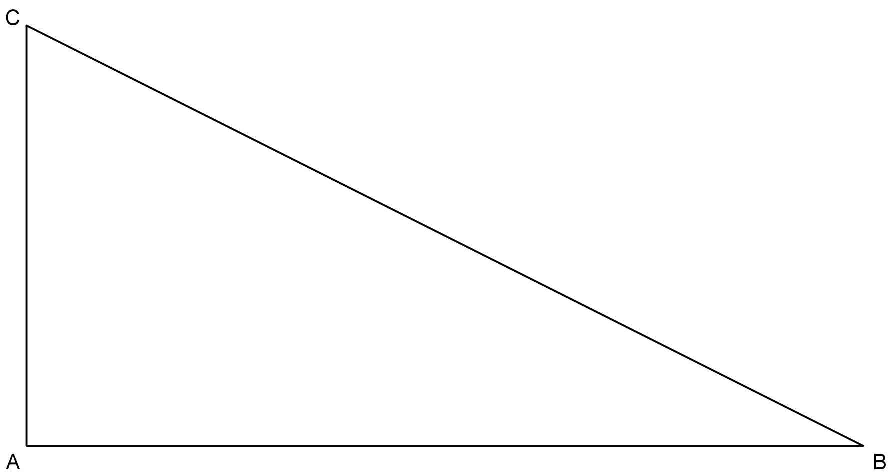


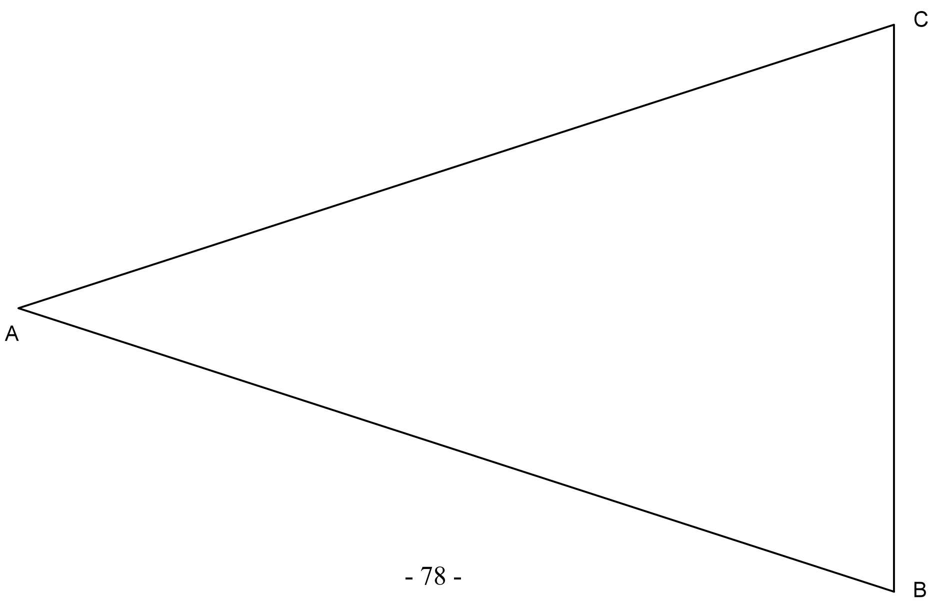
¿QUÉ UNIMOS?
Las rectas que dividen a cada uno de los ángulos en dos partes iguales.

¿CÓMO SE LLAMA EL PUNTO DONDE SE CORTAN?
Incentro I. Este punto está a a isma distancia de los tres lados y la circunferencia que pasa por ellos se llama **circunferencia inscrita.**

PRACTICAMOS

1. **Dibuja la circunferencia inscrita de estos triángulos.**



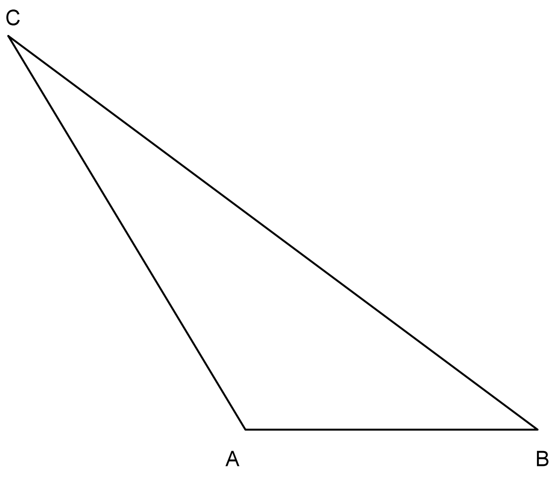


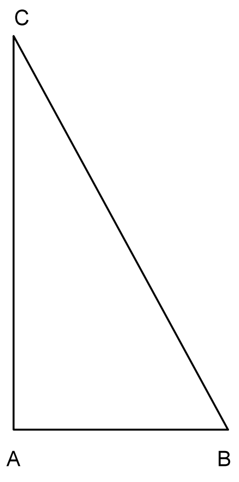
2. Dibuja un triángulo equilátero y determina su ortocentro y su incentro. ¿Qué observas? ¿Ocurre lo mismo en cualquier triángulo equilátero?

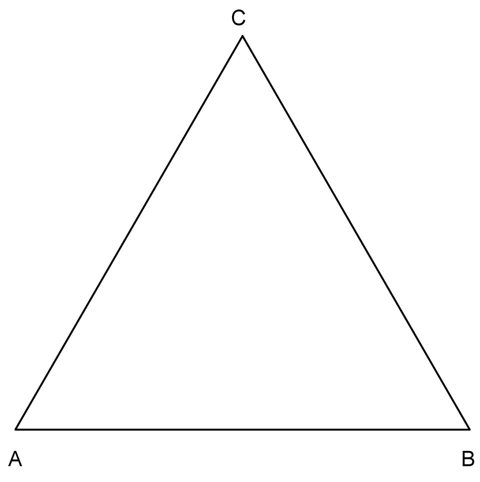
3. Dibuja varios triángulos rectángulos y señala su ortocentro. ¿Dónde se encuentra situado?

4. Dibuja tres puntos que no estén alineados y traza la circunferencia que pasa por ellos. ¿Cómo se llama esa circunferencia?

5. Escribe el nombre de los siguientes triángulos según sus ángulos. Después, dibuja su ortocentro. ¿Qué observas?



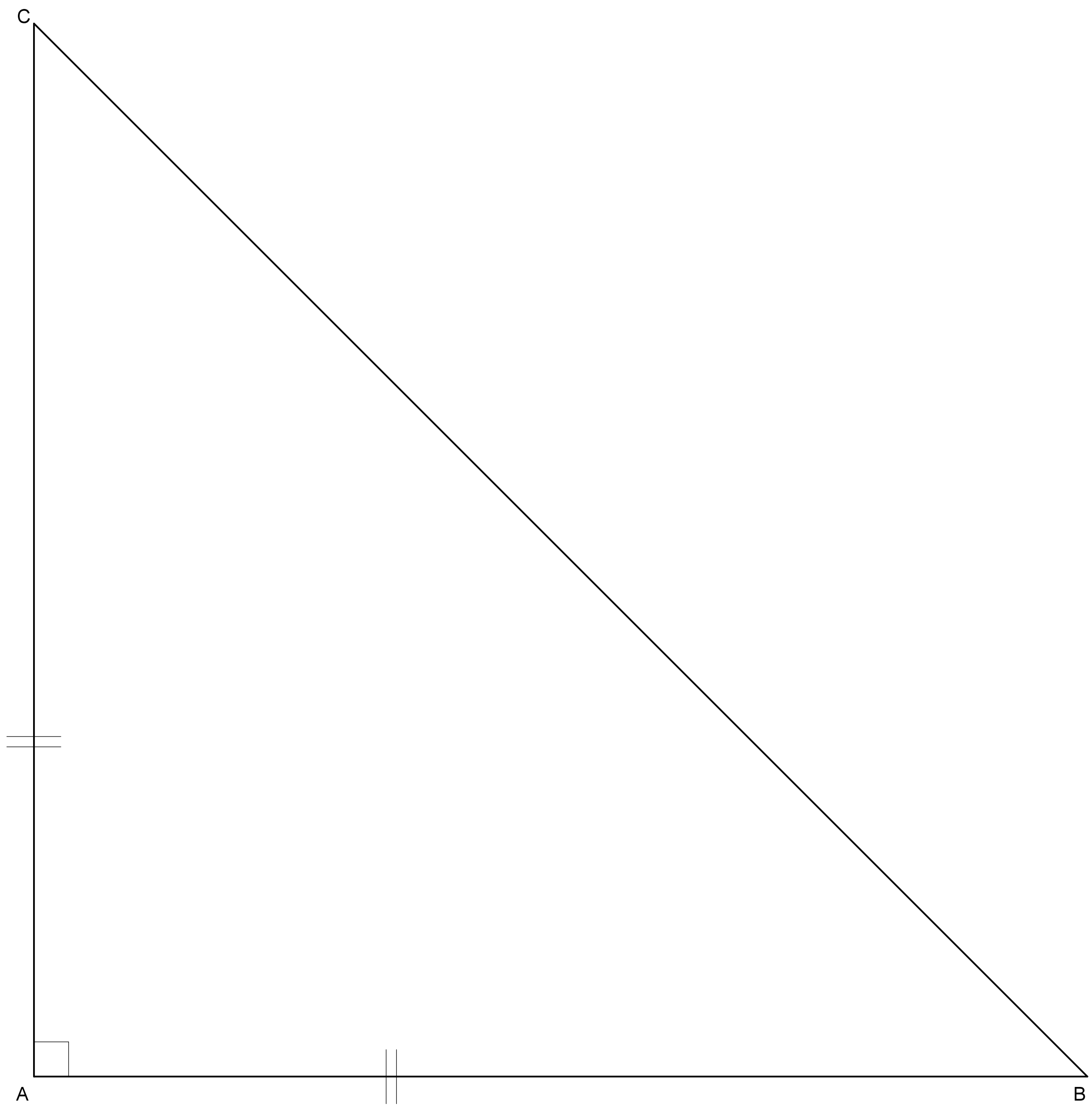




6. **Tenemos un trángulo rectángulo isósceles. Las dos líneas denotan los dos lados que son de igual longitud. Dibuja las mediatrices en rojo y las bisectrices en azul. Después, señala el punto donde se cortan y traza las circunferencias inscrita y circunscrita.**

   Ahora une estos dos puntos. ¿Cómo llamamos a esta recta?
   a) Mediana
   b) Mediatriz
   c) Altura
   d) Bisectriz

   La altura que corresponde a la hipotenusa ¿es mayor que un cateto?
   La mediana correspondiente a la hipotenusa, ¿es mayor o menor que un cateto?

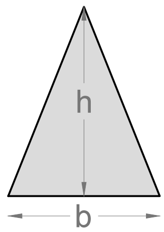


Anexo IV
Actividades de refuerzo

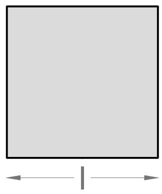
NOMBRE:____

RECORDAMOS LO APRENDIDO

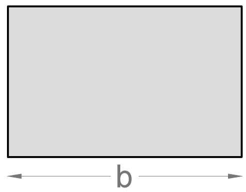
TRIÁNGULO
Área =



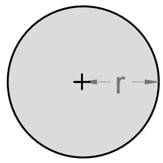
CUADRADO
Área =



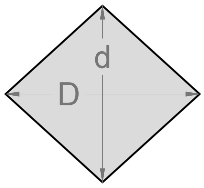
RECTÁNGULO
Área =



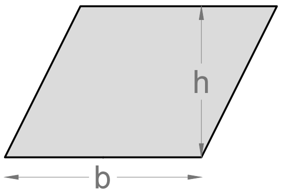
CÍRCULO
Área =



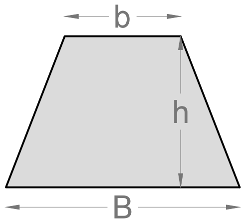
ROMBO
Área =



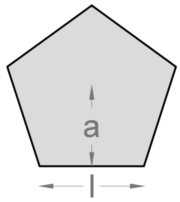
ROMBOIDE
Área =



TRAPECIO
Área =



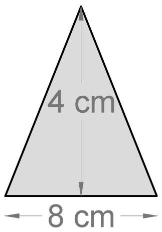
POLÍGONO REGULAR
Área =
Perímetro=



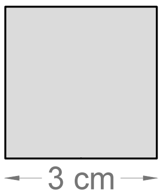
PRACTICAMOS I

Calcula el área de las siguientes figuras:

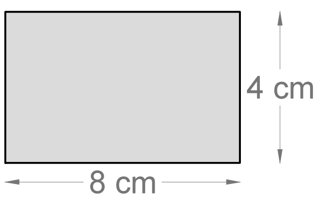
a)



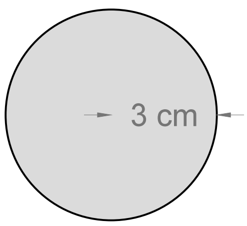
b)



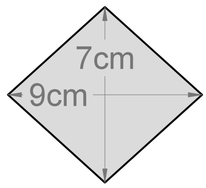
c)



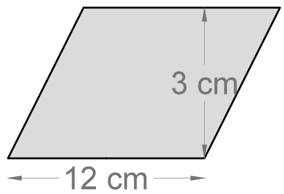
d)



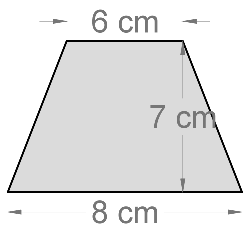
e)



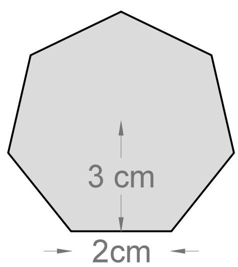
f)



g)

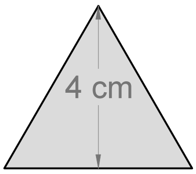


h)

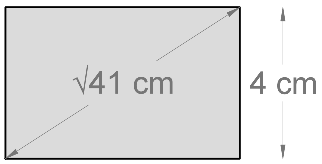


PRACTICAMOS II

a) Halla el área del triángulo equilátero de la figura.



b) Halla el área del rectángulo de la figura.



c) Halla el área de un rectángulo de base 7 cm y perímetro 32 cm.

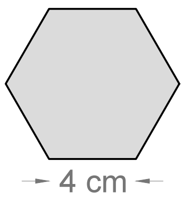
d) En un triángulo isósceles, el lado desigual mide 8 cm y el área es de 40 cm². Calcula la longitud de los otros dos lados.

e) En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide 10 cm y el área es de 80 cm². Calcula la longitud de la hipotenusa.

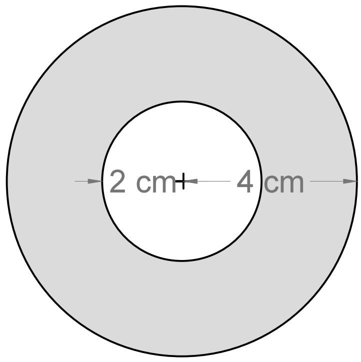
f) Halla el área de un triángulo equilátero de 120 cm de perímetro.

PRACTICAMOS III

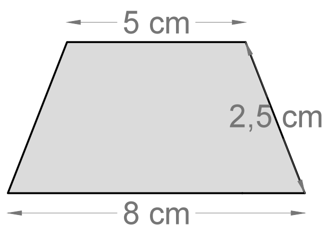
a) Halla el área del hexágono de la figura.

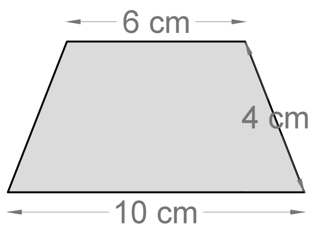


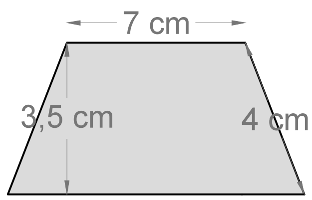
b) Halla el área sombreada de la figura.

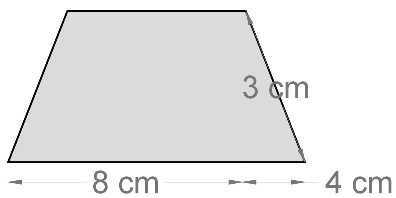


c) Halla el área de los siguientes trapecios



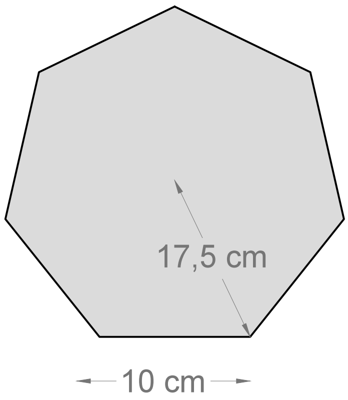


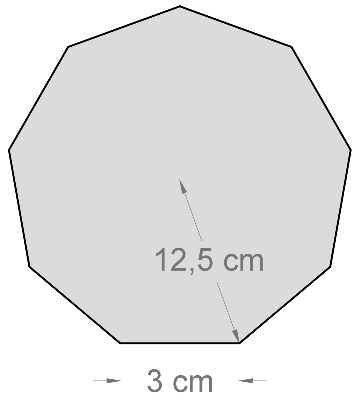




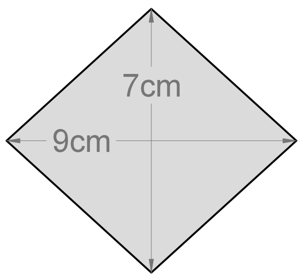
PRACTICAMOS IV

a) Calcula el área de los polígonos regulares dibujados.



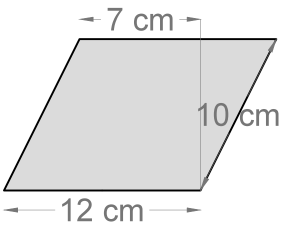


b) Calcula el lado del siguiente rombo:



c) Calcula el diámetro de una circunferencia sabiendo que su área es de 113,1 cm².

d) Calcula el área del romboide de la figura.



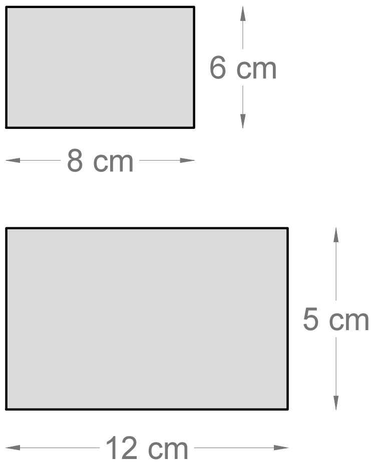
e) Halla el lado de un triángulo equilátero de 40 cm².

Anexo V
Prueba escrita

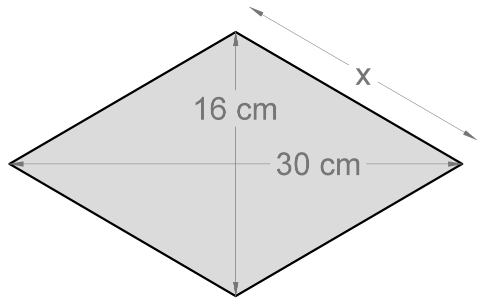
NOMBRE:____ FECHA 12/4/16

TEMA: TEOREMA DE PITÁGORAS Y ÁREA DE FIGURAS PLANAS

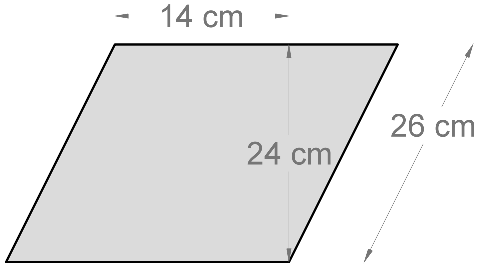
1) Halla **la diagonal** de los siguientes rectángulos:



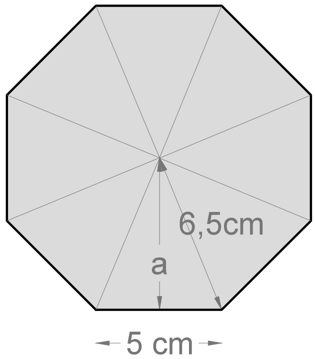
2) Halla **el lado** de un rombo de 16 cm de diagonal menor y de 30 cm de diagonal mayor.



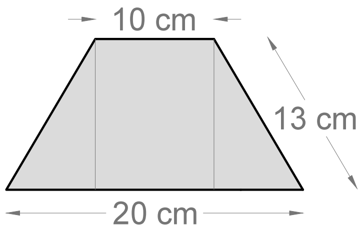
3) Calcula **el área** del romboide de la figura:

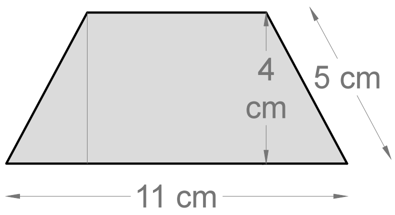


4) Halla **el área** del octógono regular:



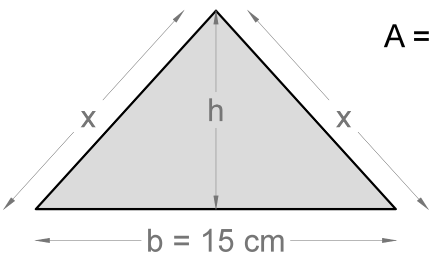
5) Halla **el área** de los siguientes trapecios:





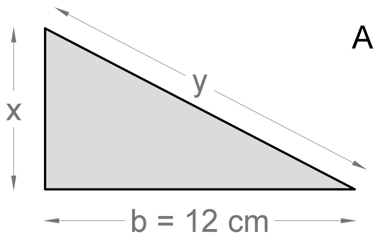
6) Halla **el lado o los lados que faltan por conocer** (denotados como x e y):

a) de un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 15 cm y tiene un área de 30 cm².



A = 30 cm².

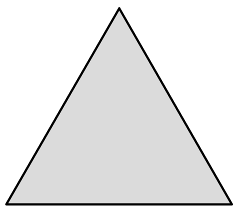
b) de un triángulo rectángulo, en el que la base mide 12 cm y el área es de 54 cm².



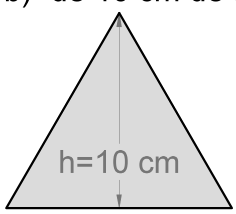
A = 54 cm².

7) Halla **el área** de un **triángulo equilátero**:

a) de 30 cm de perímetro:



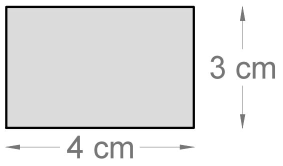
b) de 10 cm de altura:

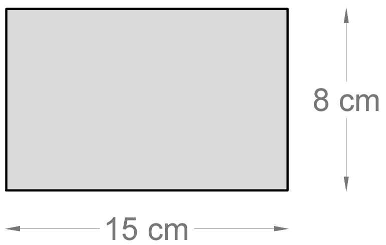


NOMBRE:____ FECHA 8/4/16

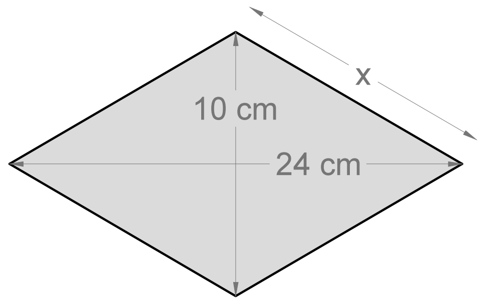
TEMA: TEOREMA DE PITÁGORAS Y ÁREA DE FIGURAS PLANAS

1) Halla **la diagonal** de los siguientes rectángulos:

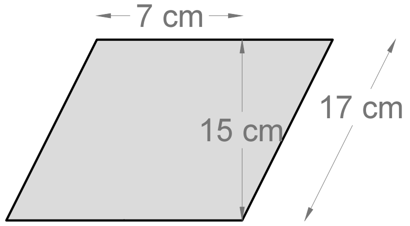




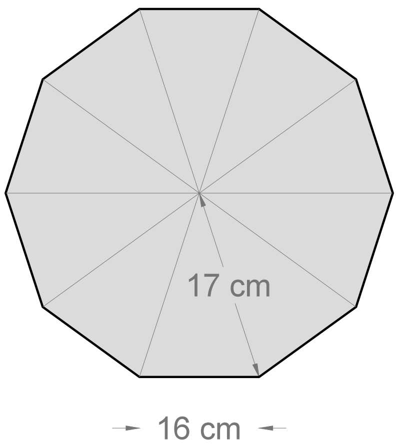
2) Halla **el lado** de un rombo de 10 cm de diagonal menor y de 24 cm de diagonal mayor.



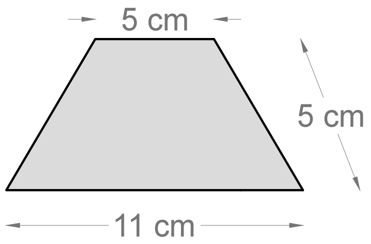
3) Calcula **el área** del romboide de la figura:

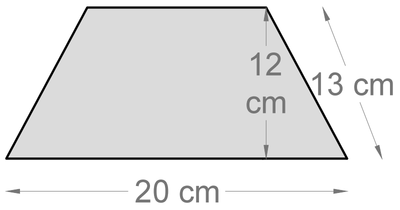


4) Halla **el área** del polígono regular:



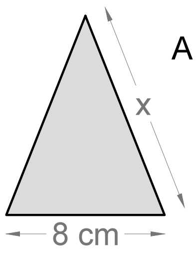
5) Halla **el área** de los siguientes trapecios:





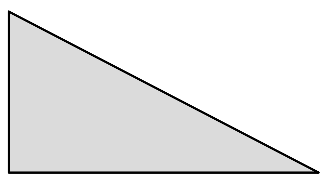
6) Halla **el lado o los lados que faltan por conocer** (denotados como x e y):

a) de un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 8 cm y tiene un área de 12 cm².



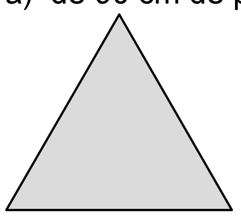
A = 12 cm².

b) de un triángulo rectángulo, en el que uno de los catetos mide 16 cm y el área es de 96 cm².

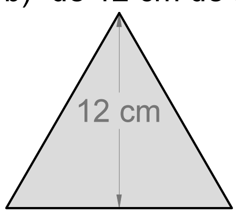


7) Halla **el área** de un **triángulo equilátero**:

a) de 90 cm de perímetro:



b) de 12 cm de altura:



Anexo VI
Tarea de Investigación I
Construimos triángulos

NOMBRE:____

CONSTRUIMOS TRIÁNGULOS.
BUSCAMOS RELACIONES ENTRE SUS LADOS.

1. El segmento "a" es la base de un triángulo. Los segmentos "b" y "c" que aparecen dibujados bajo el enunciado son los otros dos lados. Utiliza tu compás para transportar sus medidas sobre el segmento "a". Después, dibuja un arco de círculo con cada una de las medidas y construye el triángulo. Nombra sus lados y vértices.

b

c

a

2. Repite la operación con estos tres segmentos. No olvides dibujar primero los segmentos "b" y "c" sobre cada extremo del segmento "a".

b

c

a

a) ¿Has conseguido dibujar el triángulo? ¿Por qué?

b) ¿Que tendría que ocurrir para que pudiésemos dibujarlo?

c) Fijándonos en los segmentos "b" y "c" colocados sobre "a", ¿qué podemos decir de la **suma** de los segmentos b y c respecto de la longitud del segmento a?

3. Repite la operación con estos tres segmentos.

b

c

a

a) ¿Has conseguido dibujar el triángulo? ¿Por qué?

b) ¿En este caso, que tendría que ocurrir para que pudiésemos dibujarlo?

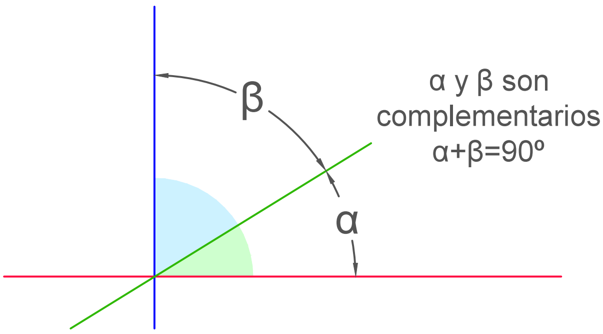
c) Sitúa ahora los segmentos "a" y "c" sobre el segmento "b". Observa el fragmento de segmento "b" que queda al restarle "c". Esta es la diferencia de los segmentos "b" y "c". ¿Qué podemos decir de esta **diferencia** respecto del segmento "a"?

Anexo VII
Tarea de Investigación II
Construimos triángulos

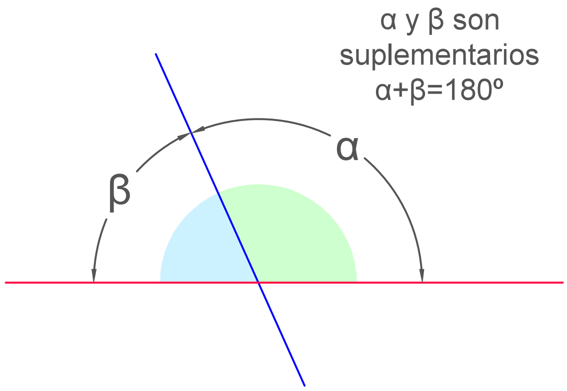
NOMBRE:____

CONSTRUIMOS TRIÁNGULOS.
BUSCAMOS RELACIONES ENTRE SUS ÁNGULOS.

Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es un ángulo recto.

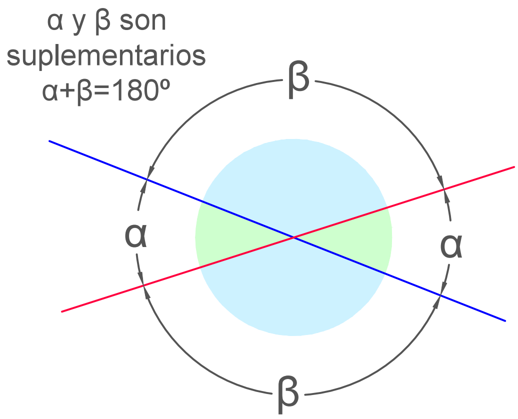


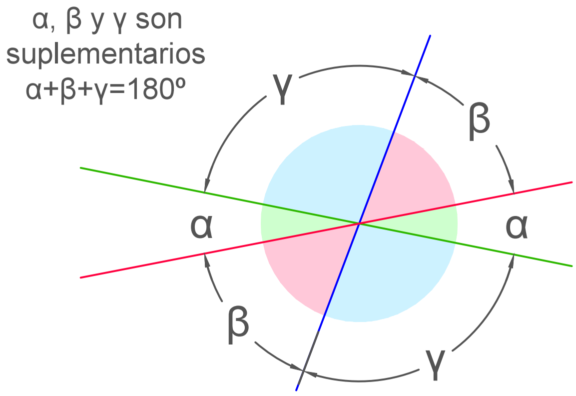
Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180º.



ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE

Son aquellos formados por dos o tres rectas que se cortan en un punto, llamado vértice. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

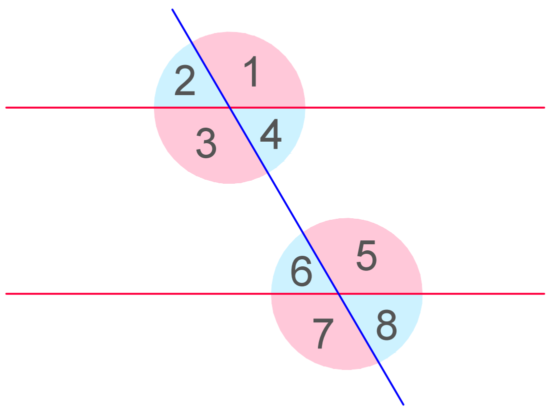




ÁNGULOS DETERMINADOS POR DOS RECTAS PARALELAS Y UNA SECANTE

Determinan 8 ángulos. Esta distribución nos permite caracterizar parejas de ángulos. Según su posición, los ángulos 3, 4, 5 y 6 son interiores ya que se sitúan entre las dos rectas paralelas, y los ángulos 1, 2, 7 y 8 son exteriores ya que se sitúan fuera.

Además, según lo visto anteriormente, los ángulos 1 y 3, 2 y 4, 5 y 7, 6 y 8 son iguales ya que son opuestos por el vértice.



1. Construimos una figura:

   a) Dibuja dos rectas paralelas horizontales de color azul.
   b) Ahora traza otras dos líneas paralelas entre sí de color rojo, y que corten a las rectas del primer apartado.
   c) Las cuatro rectas deben formar un área cerrada con forma de romboide.
   d) Traza una de sus dos diagonales de color verde, y prolóngala.

2. Identificamos ángulos:

   a) Numera los ángulos que encuentres en el dibujo de manera ordenada.
   b) Identifica ángulos opuestos por el vértice y señala los que son iguales, tanto en el dibujo como en una anotación al lado.
   c) Identifica un trío de ángulos suplementarios y márcalos en el dibujo, coloréandolos. Anota también al lado el número de los ángulos que has coloreado, e indica que son suplementarios y por qué.

3. Encuentra un triángulo en el dibujo y remárcalo. ¿Podríamos decir que sus tres ángulos son suplementarios? ¿Por qué?

4. Ahora trabajaremos con el triángulo de cartulina:

   a) Pégalo en el papel, con cuidado de no fijarlo demasiado porque después lo vamos a despegar.
   b) Traza una línea roja sobre uno de sus lados, y prolóngala. Ahora traza una paralela a la anterior y que pase por el vértice opuesto.
   c) Elige otro lado, y repite la operación. Traza primero una línea sobre el lado y prolóngala, y después, busca el vértice opuesto y dibuja su paralela.
   d) Como puedes ver, hemos construido de nuevo un romboide. La diagonal de este romboide es el lado del triángulo que no hemos utilizado. Prolonga esta línea.
   e) Por último, fijándote en cómo están nombrados los ángulos del triángulo, y observando los vértices que hemos dibujado, nombra el resto de ángulos.

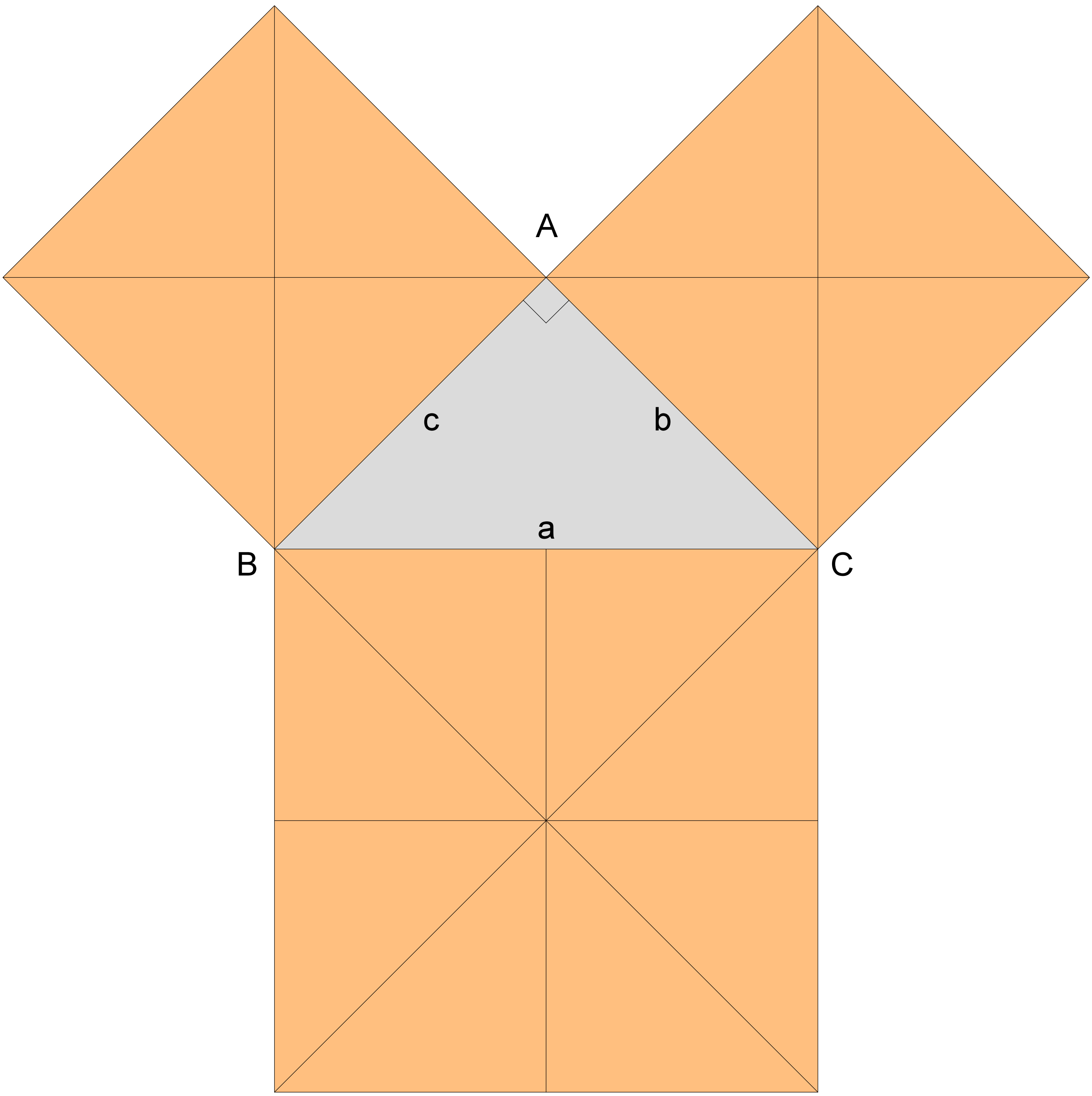
5. Despega el triángulo. Observa los ángulos que has nombrado e identifica donde se encuentran situados consecutivamente los tres del triángulo. Ahora recorta los vértices y pégalos.

   a) Según la clasificación vista, ¿cómo son estos tres ángulos?
   b) ¿Cuánto suman dichos ángulos?

Anexo VIII
Tarea de Investigación III
Puzles Pitagóricos

NOMBRE:____

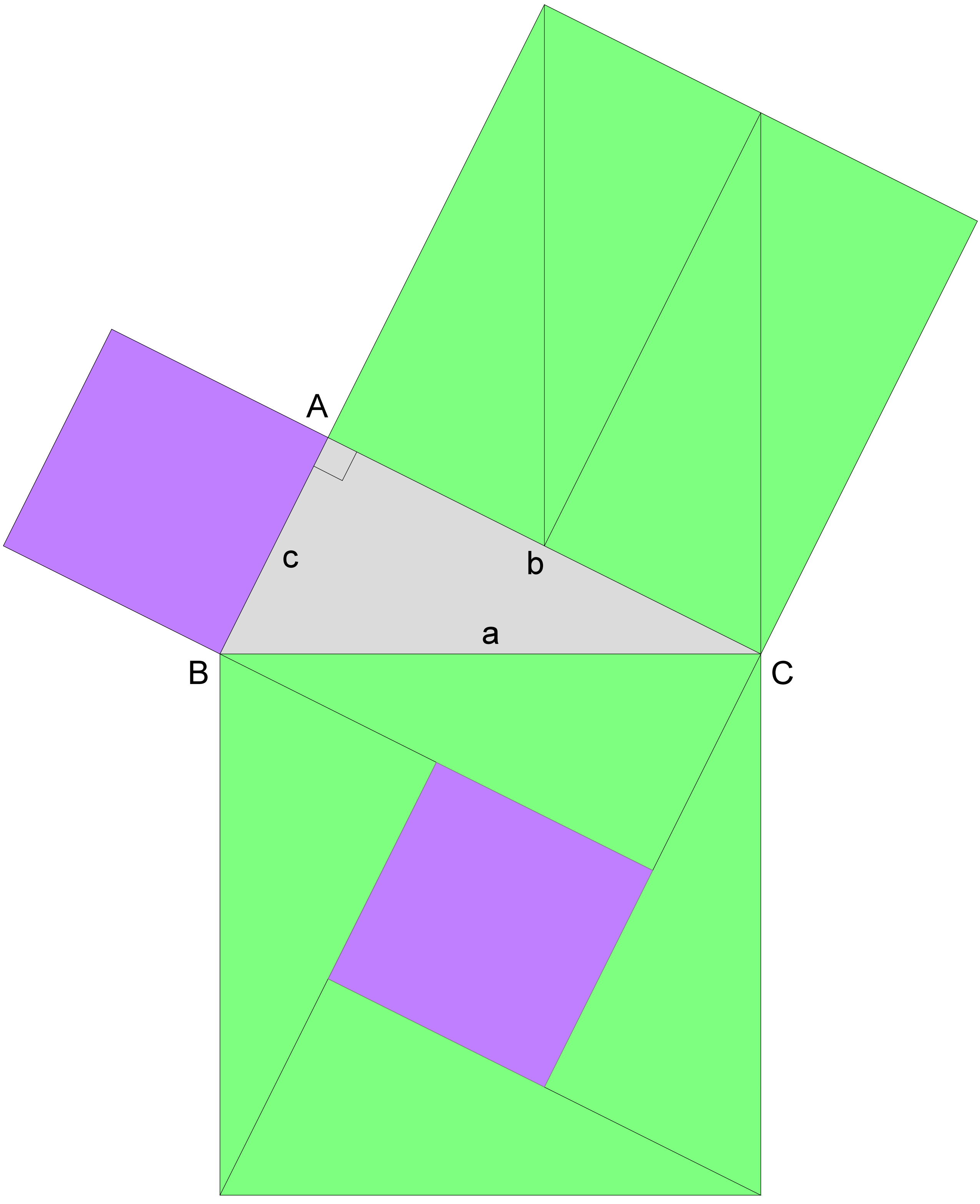
PUZZLE PITAGÓRICO 1



$a^2=b^2+c^2$

NOMBRE:____

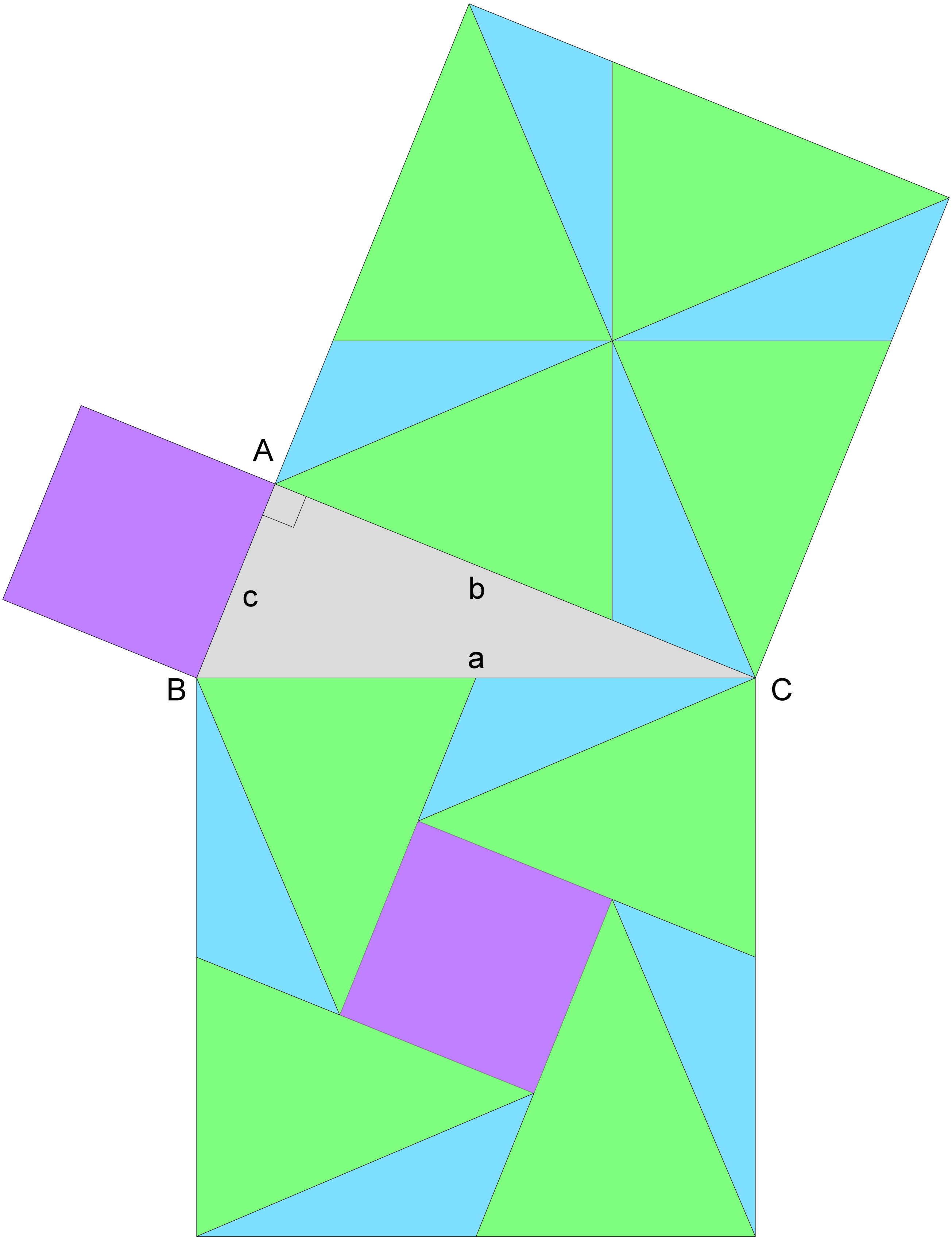
PUZZLE PITAGÓRICO 2



$a^2=b^2+c^2$

NOMBRE:____

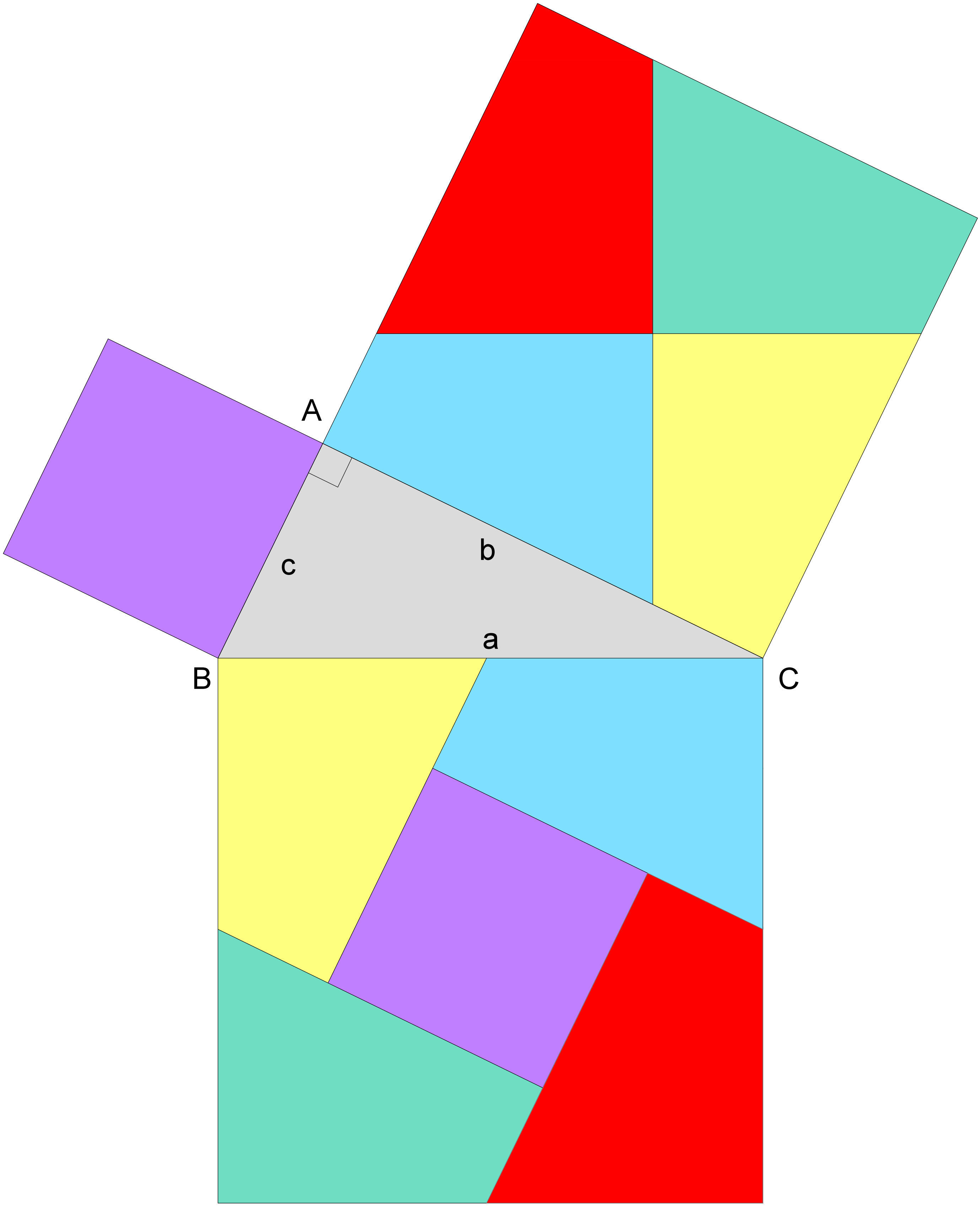
PUZZLE PITAGÓRICO 3



$a^2=b^2+c^2$

NOMBRE:____

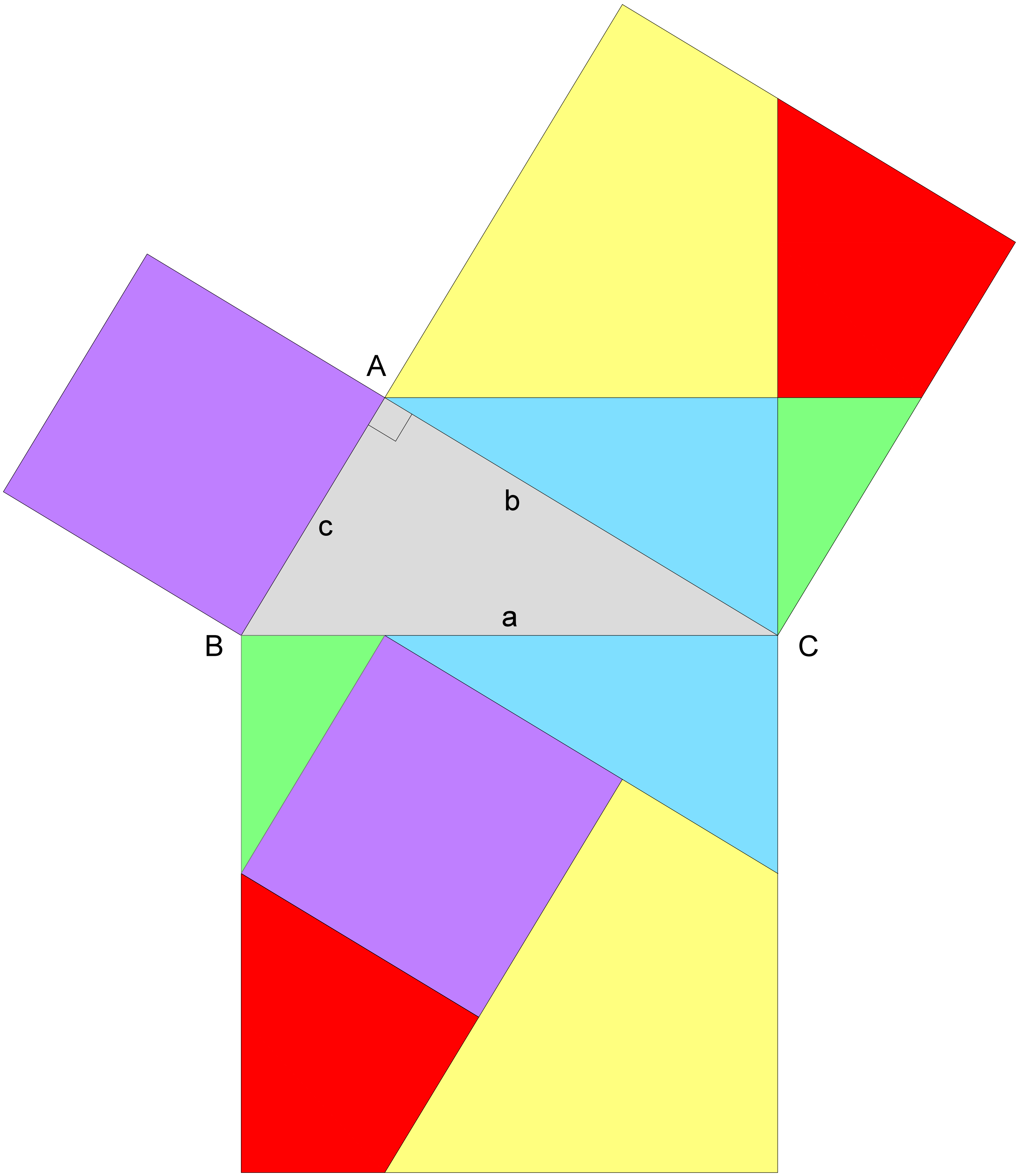
PUZZLE PITAGÓRICO 4. PERIGAL



$a^2=b^2+c^2$

NOMBRE:____

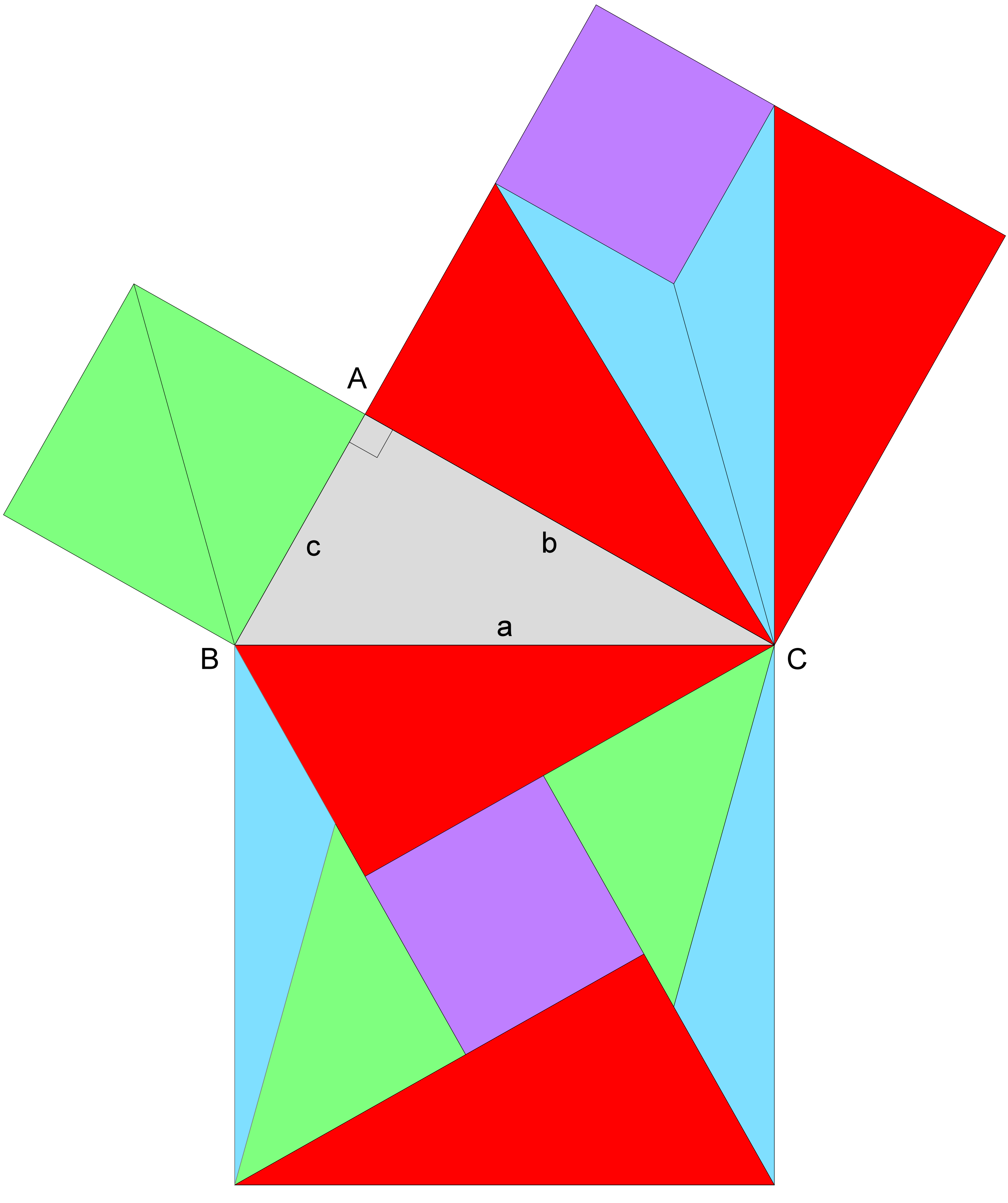
PUZZLE PITAGÓRICO 5



$a^2=b^2+c^2$

NOMBRE:____

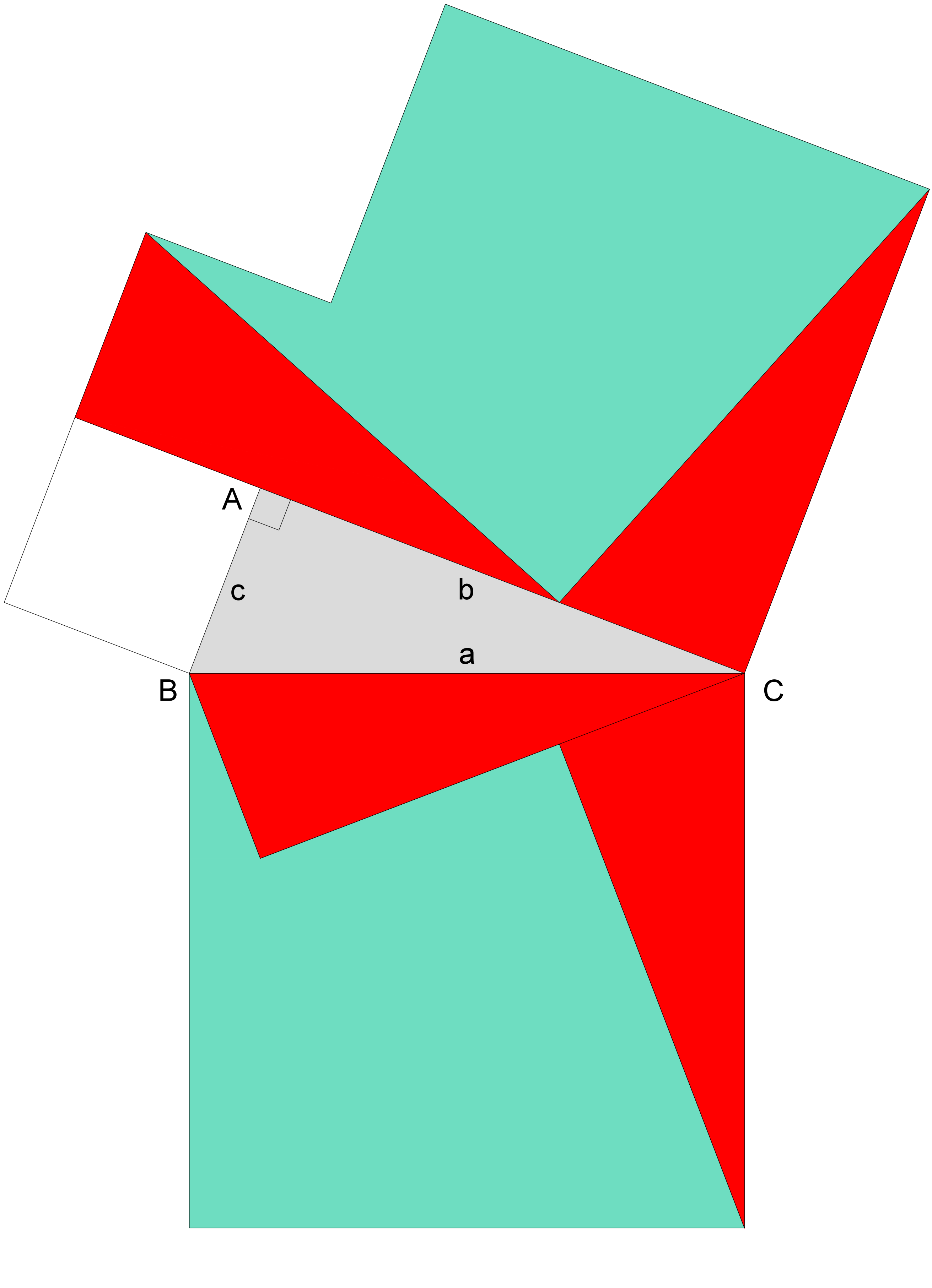
PUZZLE PITAGÓRICO 6



$a^2=b^2+c^2$

NOMBRE:____

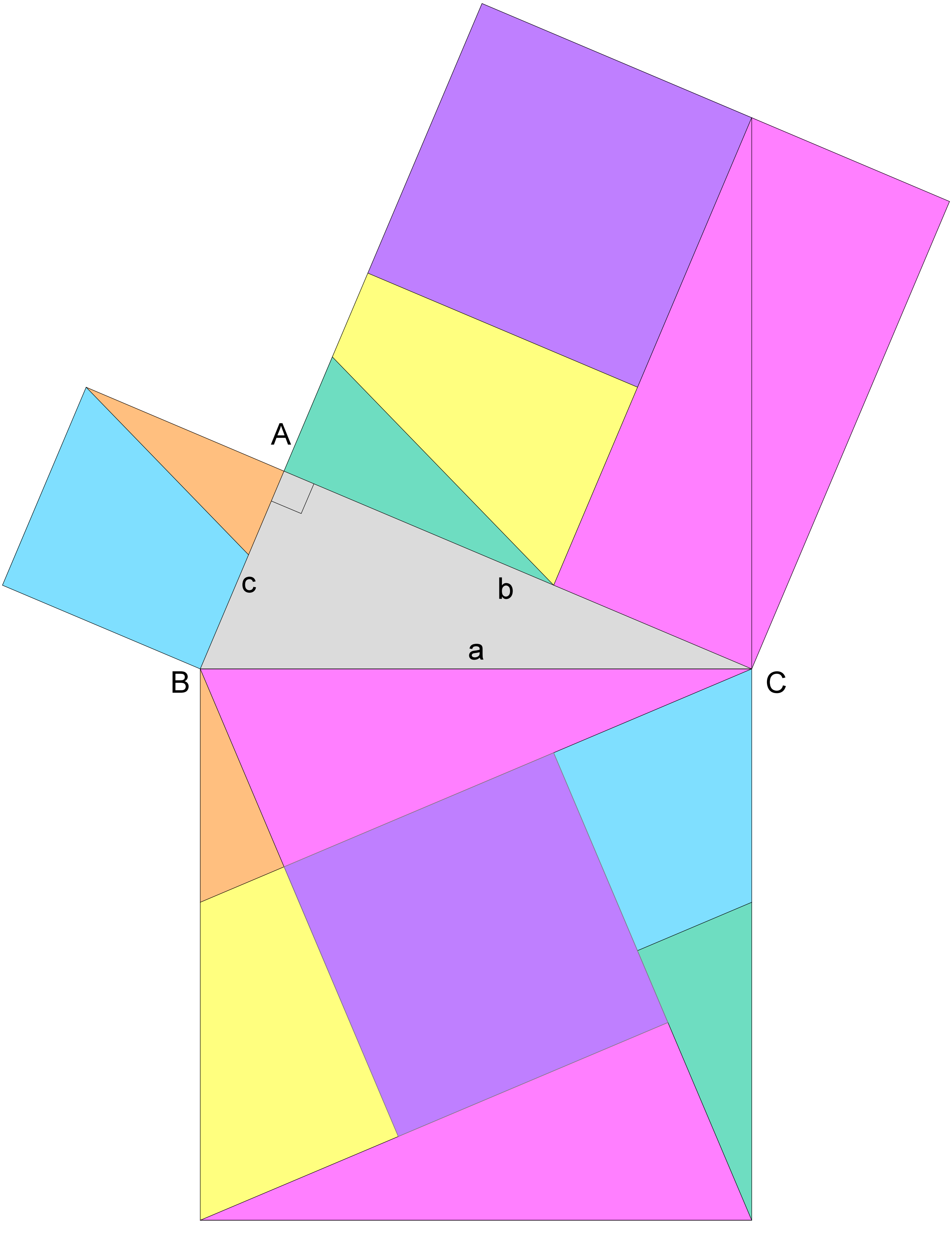
PUZZLE PITAGÓRICO 7. OZANAM



$a^2=b^2+c^2$

NOMBRE:____

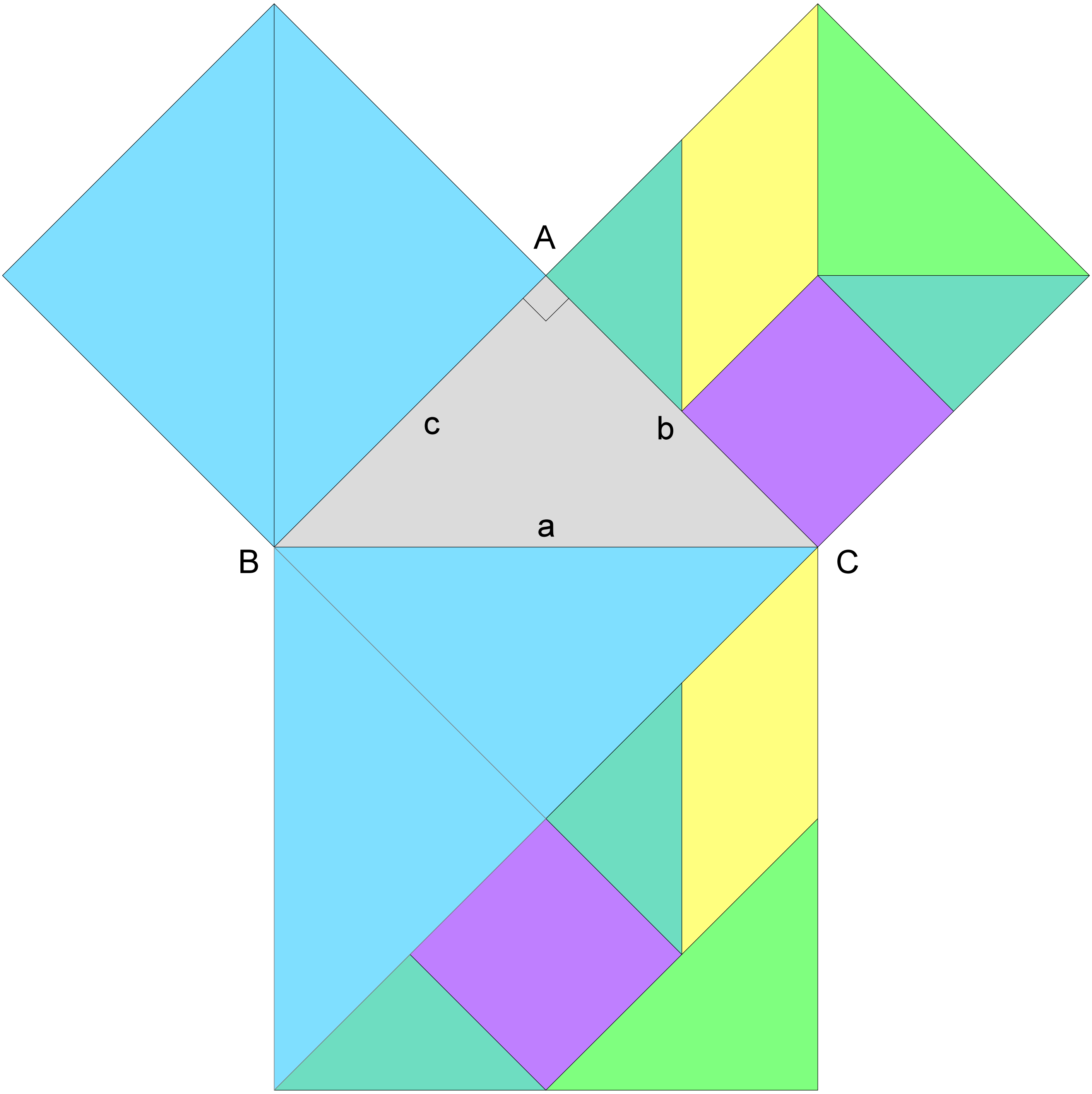
PUZZLE PITAGÓRICO 8. BHÂSKARA



$a^2=b^2+c^2$

NOMBRE:____

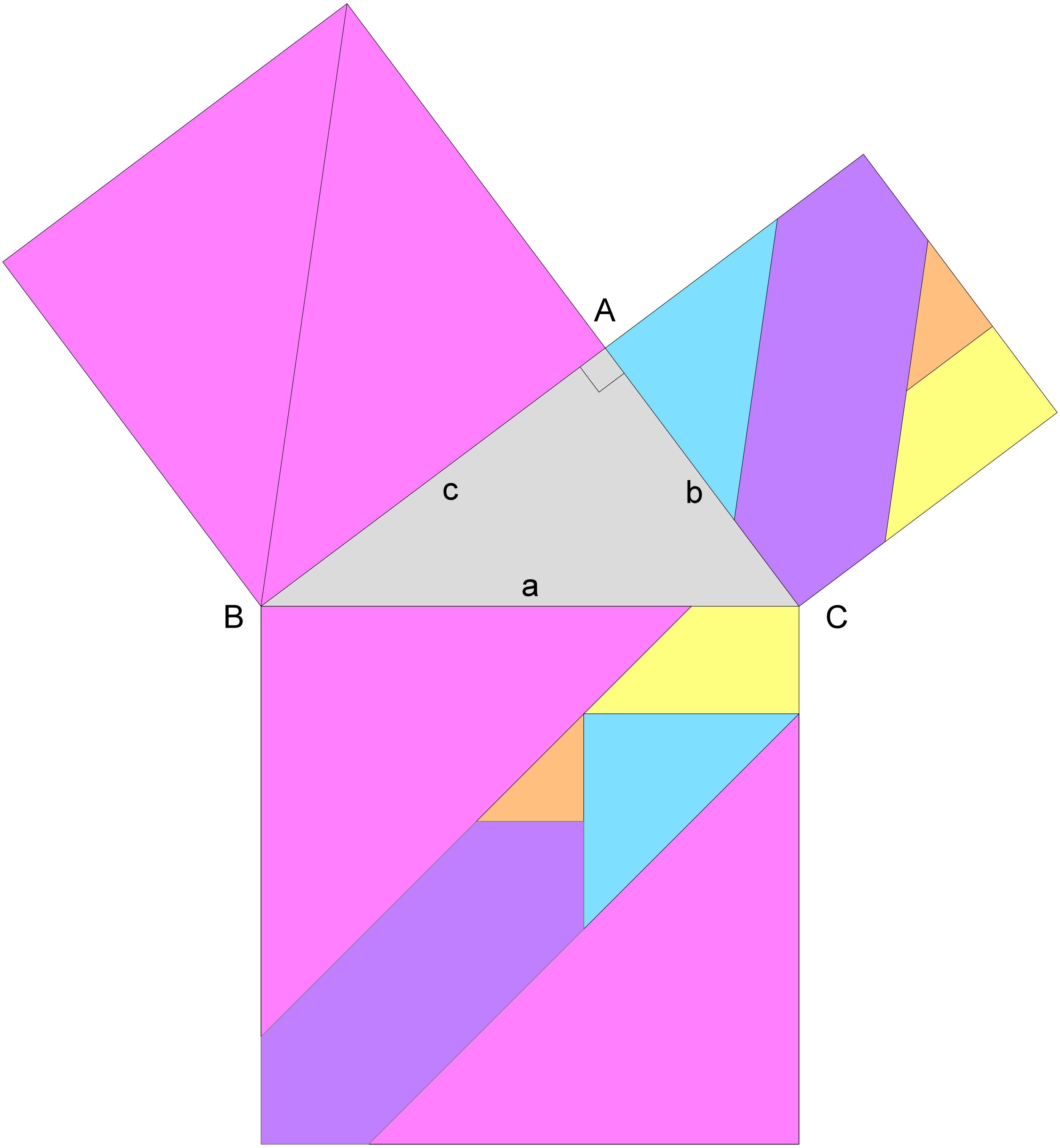
PUZZLE PITAGÓRICO 9



$$a^2=b^2+c^2$$

NOMBRE:____

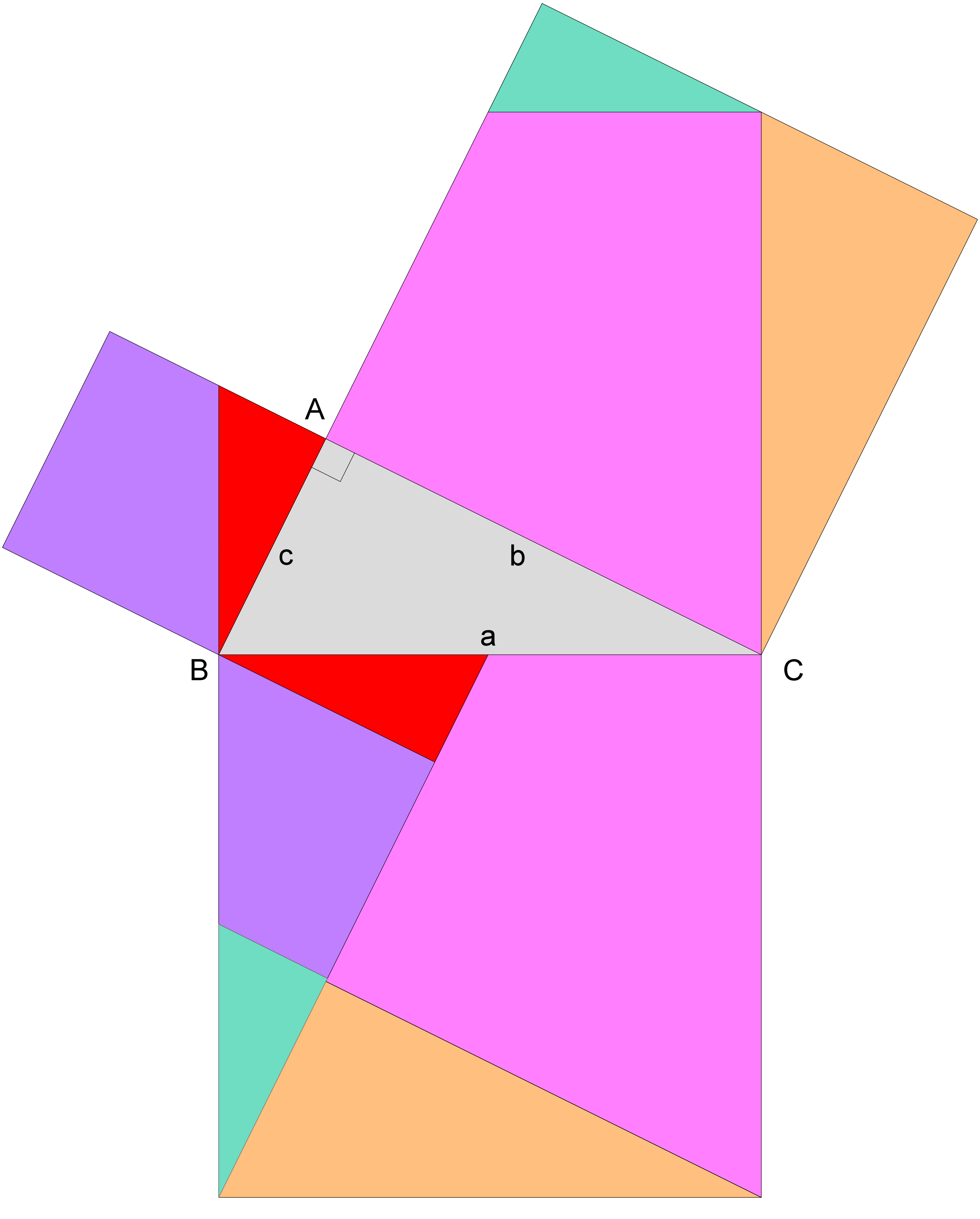
PUZZLE PITAGÓRICO 10



$a^2=b^2+c^2$

NOMBRE:____

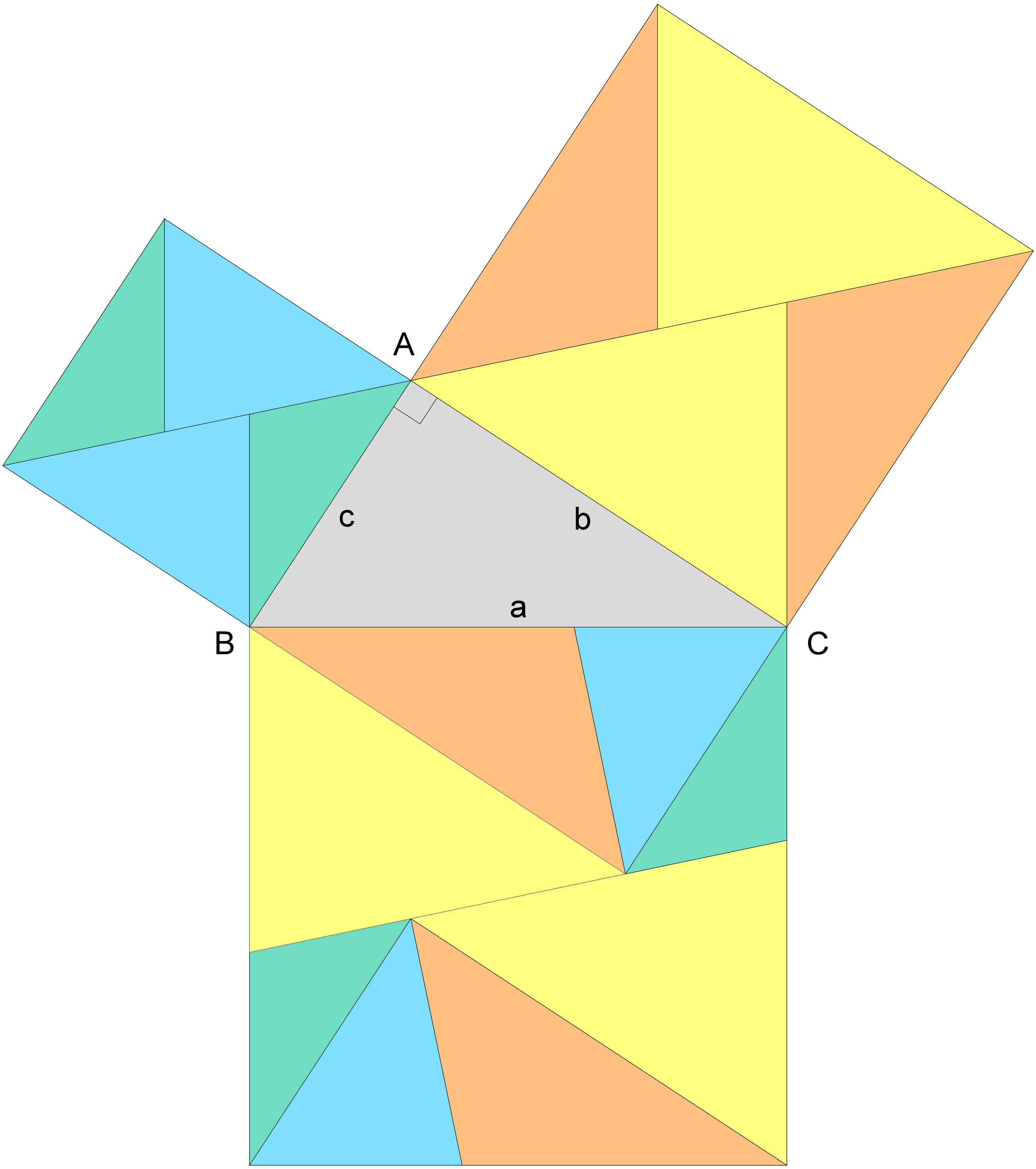
PUZZLE PITAGÓRICO 11. ANARICIO



$a^2=b^2+c^2$

NOMBRE:____

PUZZLE PITAGÓRICO 12



$a^2=b^2+c^2$